

TD M43 – Probabilités

Série 2 – Vecteurs aléatoires à densité

Exercice 1: Le paradoxe de Bertrand

On considère un cercle de rayon 1. Soit $\ell = \sqrt{3}$ le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

On trace “au hasard” une corde du cercle. Calculer la probabilité que cette corde soit plus courte que ℓ

1. en choisissant les extrémités de la corde de manière uniforme sur le bord du cercle;
2. en choisissant le point milieu de la corde de manière uniforme dans le disque;
3. en choisissant de manière uniforme et indépendante la distance du milieu de la corde au centre du cercle, et la direction de la corde.

Exercice 2

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $j = 1, \dots, n$, on définit $Y_j = \sum_{i=1}^j X_i$.

1. Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour tout i, j .
2. Ecrire la densité jointe des variables Y_1, \dots, Y_n .
3. Calculer la probabilité de l'événement

$$\{Y_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

4. Quelle intégrale donne la probabilité de l'événement

$$\left\{ \sup_{i=1, \dots, n} |Y_j| > 1 \right\} ?$$