TD M43 – Probabilités

Série 1 – Rappels sur les probabilités discrètes

Exercice 1

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour 9 non vaccinés.

1. Les événements “avoir été vacciné” et “être tombé malade” sont-ils indépendants?
2. Au cours de l'épidémie, il y a eu un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle était la probablilité de tomber malade pour quelqu'un de non vacciné?

Exercice 2

Soit $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ avec $p(\omega) = 1/3$ pour chaque $\omega \in \Omega$. Considérons les variables aléatoires $X(\omega) = \omega$ et $Y = |X|$.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
2. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 3

Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).
Déterminer

1. la loi conjointe de X et Y,
2. les lois (marginales) de X et Y, leur espérance et leur variance,
3. la covariance de X et Y,
4. la variance de $X + Y$.

Exercice 4

Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. On tire successivement k boules, sans remise ($k \leqslant r + b$).

1. Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i$ème boule est rouge, 0 sinon. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1, de X_2, puis de X_i pour $i = 3, \dots, k$.
2. Soit $X = X_1 + \dots + X_k$ le nombre de boules rouges tirées. Calculer son espérance, puis sa loi (loi hypergéométrique).
3. Déterminer la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$, et en déduire la variance de X.

Exercice 5

Calculer la probabilité que dans un amphi de n étudiants, au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. On admettra que chaque année compte 365 jours, et que les anniversaires sont distribués de manière uniforme. Donner une approximation de la probabilité pour $n \ll 365$,

1. en faisant un développement limité en $\epsilon = n/365$;
2. en utilisant la formule de Stirling.

Quel doit être le nombre n d'étudiants pour qu'il y ait au moins une chance sur deux pour qu'ils soient deux à avoir leur anniversaire le même jour?