Université de Toulon
DEUG 2 M42, 2003-4.

Série d'exercices 9

Courbes paramétrées II
Courbes en polaires, coniques

I Courbes en polaires. *(Dans l'équation $\rho = \rho(\theta)$, ρ peut prendre des valeurs négatives.)*

1) On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $\rho(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta/2)}$.

a) Déterminer les symétries et l'intervalle d'étude.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une branche infinie d'asymptote $y = 2$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote.

c) Calculer les tangentes pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, et tracer $\mathcal{C}$.

2) En s'inspirant du plan ci-dessus, étudier les courbes $\mathcal{C}$ suivantes (déterminer les tangentes aux points remarquables):

a) $\rho = a(\cos\theta + 1)$, $a > 0$ (cardioïde.) Trouver le lieu des milieux des cordes de $\mathcal{C}$ vues de O sous un angle droit.

b*) $\rho = a\cos\theta + b$, suivant les valeurs de $a,\ b \in \mathbf{R}$ (colimaçons de Pascal.) Trouver encore le lieu des milieux des cordes de $\mathcal{C}$ vues de O sous un angle droit.

c) $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ (lemniscate de Bernouilli.)

d) $\rho = a\sin\theta\tan\theta$ (cissoïde de Dioclès.)

e*) $\rho = a\big(1 + \tan\frac{\theta}{2}\big)$. Chercher le point double.

3) Trouver l'équation en coordonnées polaires d'un cercle passant par l'origine (on pourra repérer son centre par (R, θ_0))

4*) Tracer la spirale $\rho = e^{\lambda\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que la courbe fait un angle constant avec le rayon vecteur $\vec{OM}(\theta)$. Réciproquement, caractériser les courbes polaires qui satisfont cette propriété. Tracer la spirale $\rho = 2 + e^{\theta}$.

II Coniques

1) Examen DEUG M42 2002: Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$32 + 3x^2 + 12\sqrt{2}y + 3y^2 - 2x(6\sqrt{2} + y) = 0.$$

a) Calculer le déterminant de la partie quadratique; que peut-on dire sur le type de $\mathcal{C}$?

b) Trouver l'isométrie qui la transforme en sa forme normale et tracer $\mathcal{C}$.

2) Etudier et tracer la conique d'équation

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4x - 2y = 0.$$