Université de Toulon
DEUG 2 M42, 2003-4.

**Série d'exercices 8**

Courbes paramétrées I

1) Etudier les courbes paramétrées définies par

$$\begin{aligned} &a) \quad x(t) = t+1,\ y(t) = t^2 - t + 2 \\ &b) \quad x(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}),\ y(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{t} - t) \end{aligned}$$

(étudier notamment les symétries, tracer et reconnaître les courbes. )

2) Pour $\lambda > 0$ on considère la courbe (cycloïde) $\mathcal{C}_\lambda$

$$x_\lambda(t) = t + \lambda \sin t,\ y_\lambda(t) = \lambda \cos t$$

a) Quelles sont les symétries de $\mathcal{C}_\lambda$ (invariance par translation, symétries miroir, ...? ) En déduire l'intervalle d'étude $I$.

b) On suppose $\lambda = 1$. Montrer que $\mathcal{C}_1$ admet un point stationnaire dans $I$. Déterminer les variations de $(x_1(t), y_1(t))$ et tracer la courbe.

c) On suppose $\lambda > 1$ (épicycloïde). Montrer que $\mathcal{C}_\lambda$ admet un point double dans $I$. Déterminer les variations de $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ dans $I$ et tracer la courbe.

d) On suppose $\lambda < 1$ (hypocycloïde). Déterminer les variations de $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ dans $I$ et tracer la courbe.

e) Interprétation cinématique ?

3) Etudier les courbes parametrées definies par

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2},\ y(t) = t^3 - t \\ &\text{b)} \quad x(t) = \frac{t^3}{3t+1},\ y(t) = \frac{3t^2}{3t+1} \end{aligned}$$

Points doubles ou stationnaires, asymptotes, symétries ?

4) Etudier les "figures de Lissajous" definies par

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos 2t \\ &\text{b)} \quad x(t) = \sin t,\ y(t) = \sin 2t \\ &\text{c)} \quad x(t) = \sin 2t,\ y(t) = \cos 3t \end{aligned}$$

(Réduire l'intervalle d'étude, trouver les points doubles et stationnaires, étudier les variations et tracer la courbe.)

5) Etudier au voisinage de $t_0$ les courbes suivantes:

a) $x(t) = 1 + t^2 + t^4,\ y(t) = 2t^2 - 3t^4 + t^5,\ t_0 = 0$

b) $x(t) = t + t^2 - t^3,\ y(t) = t^2 + t^3 - t^5,\ t_0 = 0$

c) $x(t) = -1 - 2t^3 + 2t^4,\ y(t) = 1 + t^3 + t^4 - 3t^5,\ t_0 = 0$

d) $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2},\ y(t) = 4\dfrac{1-2t}{(1+t^2)^2},\ t_0 = 1$

e) $x(t) = t + \dfrac{1}{t},\ y(t) = 3t + \dfrac{1}{t^3},\ t_0 = 1$

f) $x(t) = \cos^3(t),\ y(t) = \sin^3(t),\ t_0 = 0$