Université de Toulon

DEUG 2 M42, 2003-4.

Série d'exercices 7

Géometrie affine euclidienne II

Isométries de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.

1) Dans le plan affine $\mathbf{R}^2$, muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère l'application $f:(x,y)\mapsto(x',y')=(-y+1,-x+1)$.

a) Montrer que f est une isométrie affine.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants de f. Reconnaître f.

2) Dans le plan affine $\mathbf{R}^2$, muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère l'application $f:(x,y)\mapsto(x',y')=(-y+1,x-1)$.

a) Reconnaître f.

b) Déterminer l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre (0, 1) et de rayon 1.

c) Soit I le milieu de $[M,f(M)]$. Déterminer le lieu de I lorsque M parcourt $\mathcal{C}$.

3*) **Isométries involutives**. On dit qu'une application f est involutive ssi $f\circ f=I$.

a) Dans le plan affine $\mathbf{R}^2$, muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère l'application $f:(x,y)\mapsto(x',y')=\frac{1}{5}(-4x+3y-6,3x+4y+2)$. Reconnaître f et montrer que f est involutive. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

b) On passe au cas général. Soit f une isométrie involutive dans l'espace affine $\mathcal{A}$. En considérant le milieu de $[M,f(M)]$, montrer que f admet toujours un point fixe.

c) Déterminer l'ensemble des isométries involutives de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.

4) Etudier les isométries suivantes, dont on déterminera les éléments caractéristiques.

a) $(x,y,z)\mapsto(x',y',z')=\frac{1}{3}(x-2y+2z,-2x+y+2z+6,2x+2y+z)$

b) $(x,y,z)\mapsto(x',y',z')=(z+1,x+1,y+2)$

c) $(x,y,z)\mapsto(x',y',z')=\frac{1}{3}(2x+2y-z,-x+2y+2z-1,2x-y+2z-2)$

d) $(x,y,z)\mapsto(x',y',z')=(\frac{1}{9}(7x-4y-4z),\frac{1}{9}(-4x+y-8z)-2,\frac{1}{9}(-4x-8y+z)+2)$.

5) Déterminer les équations

a) d'une symétrie-translation de plan $\{x+3y-z=2\}$ et de vecteur $(1,0,1)$;

b) d'un vissage d'axe $(1,2,2)+\mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$, de vecteur $(2,2,0)$ et d'angle $\pi/2$.

6) (Examen M41, 1999) On considère:

$$f:(x,y,z)\mapsto(x',y',z')=\frac{1}{3}(2x-y+2z-1,2x+2y-z-1,-x+2y+2z+2)$$

a) Montrer que f est une isométrie affine.

b) Vérifier que $A=(1,0,1)$ est invariant par f. En déduire que f est une rotation dont on déterminera l'angle et l'axe.

c) On note τ_V la translation de vecteur $V=(1,1,1)$. Etudier $\tau_V\circ f$ et $f\circ\tau_V$.