Université de Toulon
DEUG 2 M42, 2003-4.

Série d'exercices 6

Géometrie affine euclidienne I

I. Généralités

1) Soit E un e.v. muni du produit scalaire euclidien $\langle\cdot|\cdot\rangle$, $\mathcal{A}$ un espace affine sur E, d la distance sur $\mathcal{A}$ associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Démontrer l'inégalité du triangle :

$$\forall M, N, P \in \mathcal{A} : |d(M,P) - d(N,P)| \leq d(M,N) \leq d(M,P) + d(N,P)$$

2) Egalité du parallélogramme. Mêmes hypothèses qu'en 1). Montrer:
$\forall x, y \in E : 2|x|^2 + 2|y|^2 = |x-y|^2 + |x+y|^2$. (Ici on a noté $|x|^2 = \langle x|x\rangle$.) Interprétation?

3) Déterminer le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^3$ d'équations $x + y = 0, 2x - y + z = 0$, et passant par le point $a = (1,0,0)$. Calculer les distances à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ du point $b = (0,-1,2)$.

II. Géométrie plane

1) Sur 2 droites perpendiculaires se coupant en O, on place resp. les points A, B et C, D tels que $OA = OC$ et $OB = OD$. Soit E le milieu de AD. Montrer $CB \perp OE$.

2) **Orthocentre**. Soit ABC un triangle.

a) Montrer que pour tout point M du plan, on a: $\vec{MA}\cdot\vec{BC} + \vec{MB}\cdot\vec{CA} + \vec{MC}\cdot\vec{AB} = 0$.

b) Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C. Montrer que $\vec{HA}\cdot\vec{BC} = 0$. Conclusion?

3) **Droite d'Euler**. Soit ABC un triangle, AA', BB', CC' les 3 hauteurs, AA_1, BB_1, CC_1 les 3 médiatrices.

a) Montrer que les 3 médiatrices sont concourantes en un point O.

b) Soit H l'orthocentre de ABC, et G l'isobarycentre. Montrer que

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} + \vec{HA} + 2\vec{OA_1}$$

et en déduire que $3\vec{OG} - \vec{OH}$ est orthogonal à BC.

c) Montrer de même que $3\vec{OG} - \vec{OH}$ est orthogonal à CA.

d) En déduire que O, G, H sont alignés, que $\vec{AH} = 2\vec{OA_1}$, et 2 autres égalités analogues.

4*) Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$. On définit une application

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, M \mapsto f(M) = M + \vec{MA}^2\vec{BC} + \vec{MB}^2\vec{CA} + \vec{MC}^2\vec{AB}$$

On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Montrer que $f(O) = O$ et que f est une application affine.

b) Montrer que $\forall M \in \mathbf{R}^2, \vec{Mf(M)} \perp \vec{OM}$.