Université de Toulon
DEUG 2 M42, 2003-4.

**Série d'exercices 5**

Applications affines II

1) Soit l'application affine $f : (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, donnée par

$$x' = x - y + 1$$
$$y' = -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z + 2$$
$$z' = z - y + 1$$

a) Déterminer l'ensemble des points fixes de $f$.

b) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire associée.

c) En déduire l'image de $f$ et les ensembles invariants par $f$.

2) Soit $\mathcal{A}$ le s.e.a. de $\mathbf{R}^4$ defini par:

$$x + y + z + t = 1$$
$$2x - y + 2z - t = -1$$
$$-x + 5y - z + 5t = 5$$

a) On note $A$ le s.e.v. associé. Déterminer une base de $A$, un repère affine de $\mathcal{A}$.

b) Soit $\mathcal{P} = \{x = y = 0\}$, $P$ le s.e.v. associé. Montrer que $A$ et $P$ sont supplémentaires, déterminer $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$.

c) Calculer la projection affine $\pi$ sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $P$.

3*) **Dilatations**. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $E$ l'espace vectoriel associé.

a) Soit $H$ un hyperplan de $E$ et $D$ tel que $E = H \oplus D$. Soit $p$ la projection sur $H$ parallèlement à $D$, et $q = I - p$. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, on appelle *dilatation vectorielle* de rapport $\lambda$, d'hyperplan $H$ et d'axe $D$ l'application $\delta = p + \lambda q$.
Determiner $F = \{x \in E : \delta(x) = x\}$ et $F = \{x \in E : \delta(x) = \lambda x\}$.

b) Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine dirigé par $H$. On note $\pi$ la projection sur $\mathcal{H}$ parallèllement à $D$. On définit une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (appelée *dilatation affine*), de la manière suivante: à $M \in \mathcal{E}$ on associe $M'$ tel que $m\vec{M}' = \lambda m\vec{M}$, où $m = \pi(M)$.
Montrer que $\phi$ est une application affine, et déterminer l'application linéaire associée.

c) Soit $A \notin \mathcal{H}$ et $A' = \phi(A)$. Construire l'image $M' = \phi(M)$ d'un point $M \notin AA'$.
**Indication**: Cas où la droite $mA$ n'est pas parallèle à $\mathcal{H}$ : soit $I$ son intersection avec $\mathcal{H}$. Quelle est l'image de la droite $IA$ ?