Université de Toulon

DEUG 2 M42, 2003-4.

Série d'exercices 4

Applications affines I

1) Soit f l'application du plan dans lui-même, $f : M = (x, y) \mapsto M' = (x', y')$

$$x' = \frac{1}{3}(x + 4y - 4)$$
$$y' = \frac{1}{3}(2x - y + 4)$$

a) Montrer que f est une application affine, determiner l'ensemble $\mathcal{D}$ des points invariants.

b) Montrer que $\frac{1}{2}(M + f(M)) \in \mathcal{D}$, et que $\vec{Mf(M)}$ est colinéaire à un vecteur fixe. Reconnaître f.

2) On considère les 6 points de $\mathbf{R}^2$ donnés par leur coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(0, 2)$, $A'(4, 0)$, $B'(1, 3)$, $C'(1, 1)$.

Déterminer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'application affine f qui transforme (A, B, C) en (A', B', C').

3) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine qui laisse invariants 2 points d'une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$. Montrer qu'alors tout point de $\mathcal{D}$ est invariant par f. Exemples?

4) Homothéties-translations.

a) Montrer que la composée de 2 translations est une translation.

b) Montrer que la composée de 2 homothéties de même centre O et de rapports λ, λ' est une homothétie de centre O et de rapport $\lambda\lambda'$.

c) Etudier la composée d'une translation et d'une homothétie (dans les 2 sens.) (On commencera par regarder si cette transformation admet un point fixe.)

d) Etudier la composée de 2 homothéties de centre différent. (On commencera par regarder si cette transformation admet un point fixe.)

5*) Soit A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\lambda\lambda' \neq 1$, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application qui à chaque point M de $\mathcal{E}$ associe le centre $M' = f(M)$ de l'homothétie $h_{A,\lambda} \circ h_{M,\lambda'}$. Montrer que f est une homothétie dont on precisera le centre et le rapport.

6*) Soient $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ $n + 1$ points de l'espace affine $\mathcal{E}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\vec{A_0 f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{A_i M}$$

Reconnaître f (discuter suivant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.)