Université de Toulon

DEUG 2 M42, 2003-4.

Série d'exercices 3

Les théorèmes fondamentaux de la géométrie affine

1) **Applications du théorème de Thalès**.

a) Les diagonales d'un quadrilatère $ABCD$ se coupent en O. Les parallèles à BC et CD menées par O coupent respectivement AB en M et AD en N. Montrer que MN est parallèle à BD.

b) Dans le plan euclidien, on considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en un point O. Soit A un point n'appartenant ni $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{D}'$. Soient B et C des points appartenant respectivement à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, tels que $ABOC$ forme un parallélogramme. On suppose qu'une droite d passant par A coupe $\mathcal{D}$ en un point E et $\mathcal{D}'$ en un point F. Montrer que

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OF}} = 1.$$

Enoncer et démontrer la réciproque de ce théorème.

2) **Théorème de Pappus**. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, D et D' 2 droites distinctes de $\mathcal{P}$, $x, y, z \in D$, $x', y', z' \in D'$ des points distincts et distincts de $D \cap D'$.

Montrer qu'alors $xy' \parallel x'y$ et $yz' \parallel y'z$ entraîne $xz' \parallel x'z$. (On distinguera les cas où D et D' sont paralleles ou non.)

3) On reprend l'enoncé et les notations du 2). Soient $t = xy' \cap yz',\ s = yx' \cap zy'$. On suppose que les droites $D,\ D'$ se coupent en un point O, et que l'homothétie de centre O qui envoie x sur y envoie aussi y sur z. Montrer que les droites $ts,\ D$ et D' sont concourantes.

4) On reprend l'énoncé et les notations du 3). Soient $A = xy' \cap yz',\ B = yx' \cap zy',\ C = xx' \cap zz'$. Montrer que les points A, B, C sont alignés.