Université de Toulon
DEUG 2 M42, 2003-4

Série d'exercices 1

Espaces affines

1) Montrer que tout espace vectoriel E peut être muni d'une structure d'espace affine $\mathcal{E}$ sur lui-même. Si $x, y \in \mathcal{E}$, que vaut le vecteur $\vec{xy}$?

2) Passer de la représentation cartésienne à la représentation vectorielle, puis à la représentation paramétrique (ou vice versa) pour décrire les sous-espaces affines (s.e.a.) de $E = \mathbf{R}^3$ suivants :

$a)\mathcal{A} = A + \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,-1,1)\},\ A = (0,2,1)$

$b)\mathcal{A} = A + \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\},\ A = (0,2,-1)$

$c)\mathcal{A} = \{x \in E : x_1 = \lambda_1 + 5\lambda_2 - 3,\ x_2 = \lambda_1 + 2,\ x_3 = \lambda_2 - \lambda_3,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}\}$

$d)\mathcal{A} = \{x \in E : 2x_1 + x_3 = -1,\ x_2 = 1\}$

$e)\mathcal{A} = \{x \in E : x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,\ x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 2\}$

Donner leur dimension. Quel lien y a-t-il en général entre la dimension de $\mathcal{A}$ et le nombre d'équations cartésiennes qui le determinent ? Préciser ce que veut dire ici "en général".

3) Soient $\mathcal{A}_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 2\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1-x_2 = 0\}$. En donner une représentation paramétrique. Montrer que ce sont des sous-espaces affines de $\mathbf{R}^3$. Déterminer leur intersection.

4) Pour $a, a' \in \mathbf{R}$, on considère les ensembles

$$\mathcal{D}_a = \{M \in \mathbf{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbf{R}, OM = (a,0,0) + \lambda(0,1,a)\},$$
$$\mathcal{D}'_{a'} = \{M \in \mathbf{R}^3 : \exists \lambda' \in \mathbf{R}, OM = (0,a',0) + \lambda'(1,0,a')\}$$

Trouver l'équation du plan affine de $\mathbf{R}^3$ contenant $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}'_{a'}$.

5) Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels, et

$$\mathcal{A} = \{P \in E : P(0) = 1\},\ \mathcal{B} = \{P \in E : P'(0) = -1\},\ \mathcal{C} = \{P \in E : P(0) = P'(0) = 1\}$$

Montrer que ce sont des s.e.a. (sous-espaces affines) de E. Quelle est leur dimension ? Déterminer leurs intersections.

6) Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les points

$$P_1 = (2,0,1),\ P_2 = (3,0,1),\ P_3 = (2,1,2),\ Q_1 = (3,1,-1),\ Q_2 = (3,3,-1),\ Q_3 = (3,1,-2)$$

Déterminer les hyperplans $\mathrm{Aff}(P_1,P_2,P_3)$, $\mathrm{Aff}(Q_1,Q_2,Q_3)$, ainsi que leur intersection.