TD M41 Séries

Série 6 – Séries de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2, \\ 0 & \text{si } x = \pi/2, \\ -1 & \text{si } \pi/2 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue par morceaux et calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier.
3. En déduire les sommes des séries suivantes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercice 2 (Examen M41 de juin 2002)

Soit f la fonction 2π-périodique, paire, égale à $\pi - x$ sur $[0, \pi]$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. Cette série converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Exercice 3

Soit f la fonction 2π-périodique égale à $|x|$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Développer f en série de Fourier et étudier la convergence de la série.
2. Calculer les sommes

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4}.$$

Exercice 4*

On considère l'équation de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

où $c > 0$ est la vitesse du son dans la corde.

- Sous quelle condition sur ω et k la fonction $u(x,t) = \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(kx + \varphi_2)$ est-elle une solution particulière?
- Donner la solution générale satisfaisant les conditions aux bords $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
- Soit $\gamma > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \gamma(\pi - x) & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

  Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la solution de l'équation de la corde vibrante de conditions initiales $u(x,0) = f(x)$, $u'(x,0) = 0$.