TD M41 Séries

Série 5 – Séries entières

Exercice 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ dans les cas suivants:

1. $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$;
2. $a_n = \dfrac{1}{n^n}$;
3. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;
4. $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $a_n = \dfrac{n^{2n}}{n!}$;
6. $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$;
7. $a_n = a^{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$;
8. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

Exercice 2

Développer les fonctions suivantes en série entière, dont on déterminera le rayon de convergence.

1. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$;
2. $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
4. $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

Exercice 3

Calculer la somme des séries entières suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(2n+1)z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{2n+1}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 4*

1. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence de $\sum_n a_n^2 z^n$?
2. Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$ quand $n \to \infty$, alors $R_a = R_b$.

Exercice 5*

Montrer qu'il existe une solution unique de la forme $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, avec $a_0 = 1$, de l'équation différentielle

$$2xy'' + y' - y = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme.

Indication: On commencera par chercher une relation de récurrence pour les a_n.