TD M41 Séries

Série 4 – Séries de fonctions

Exercice 1

Etudier la convergence des séries de fonctions de terme général $u_n(x)$: domaine de convergence simple, convergence normale, uniforme et absolue. Si la convergence n'est pas uniforme, y a-t-il des ensembles où elle est uniforme?

1. $u_n(x) = x^n$;
2. $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$;
3. $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n!}$;
4. $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$;
5. $u_n(x) = \dfrac{x^n + (1-x)^n}{n^2}$;
6. $u_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{2^n}$;
7. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$;
8. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$;
9. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$;
10. $u_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^3x}$;
11. $u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x}$;
12. $u_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$;
13. $u_n(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$;
14. $u_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$.

Exercice 2*

Pour $a, x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$, on définit

$$u_n(x,a) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^a}.$$

1. Pour quelles valeurs de x et de a la série de terme général $u_n(x,a)$ est-elle convergente? Lorsque la série converge, on pose
$$f_a(x) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(x,a).$$
2. Montrer que la série de terme général $u_n(x,0)$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[\delta, \infty[$ et calculer sa somme $f_0(x)$.
3. Montrer que $f_1(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et calculer sa dérivée. En déduire $f_1(x)$. Que se passe-t-il lorsque $x \searrow 0$?
4. Montrer que $f_2(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et calculer sa dérivée. En déduire une représentation sous forme d'intégrale de $f_2(x)$. Que se passe-t-il lorsque $x \searrow 0$?