TD M41 Séries

Série 3 – Suites de fonctions

Exercice 1

Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes. Esquisser ces fonctions. La convergence est-elle uniforme?

1. $f_n(x) = x^n$;
2. $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$, $x \geqslant 0$;
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$;
4. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$;
5. $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$;
6. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$;
7. $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$;
8. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$, $x > 0$;
9. $f_n(x) = \dfrac{(\log x)^{2n}-2}{(\log x)^{2n}+2}$, $x > 0$;
10. $f_n(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{-x/n}$;

Exercice 2

Déterminer pour lesquelles des suites de fonctions suivantes, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $f_n(x) = x^n$, $a = 0$, $b = 1$;
2. $f_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-nx^3}$, $a = 0$, $b = 1$.
3. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} + nx^3}{1+nx^2}$, $a = 1$, $b = 2$.
4. $f_n(x) = \dfrac{n}{(x-n)^2+n^2}$, $a = 0$, $b = +\infty$;

Exercice 3*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes:

1. $f_n(x) = f(nx)$;
2. $g_n(x) = \dfrac{1}{n} f(nx)$;
3. $h_n(x) = f(x/n)$;
4. $k_n(x) = \dfrac{1}{n} f(x/n)$.