TD M41 Séries

Série 2 – Séries numériques

Exercice 1

Discuter la convergence et la convergence absolue des séries numériques $(x_n)_{n\geqslant 1}$ suivantes:

1. $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2+2}$;
2. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;
3. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;
4. $x_n = \dfrac{1}{n!}$;
5. $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$;
6. $x_n = n^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$;
7. $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$;
8. $x_n = \left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$;
9. $x_n = \log\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$;
10. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
11. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n\log(n+1)}$;
12. $x_n = (-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Discuter la convergence et calculer la valeur des sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan}\frac{1}{1+n+n^2}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$.

Indications: $\operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}(b) = \operatorname{Arctan}((a-b)/(1+ab))$, $\cos(n\alpha) = \operatorname{Re}(e^{i n\alpha})$.

Exercice 3*

1. Soit $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs, décroissante, telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ soit convergente. Montrer que $nu_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
2. Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite à termes strictement positifs.
   (a) Soit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^n x_j$. Montrer que la série de terme general u_n est divergente (on pourra la comparer avec la série harmonique).
   (b) Soit $v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{j=0}^n jx_j$. Montrer que si la série $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, alors la série $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente (on pourra décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples).

Exercice 4* Convergence au sens de Cesaro

Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe, et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^n x_j$.

1. Montrer que si x_n converge vers ℓ, il en est de même pour u_n. Réciproque ?
2. **Application** : Lemme de l'escalier.
   (a) Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe, telle que $x_{n+1} - x_n \to a$, $n \to \infty$. Montrer que $\frac{x_n}{n} \to a$, $n \to \infty$.
   (b) Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs, telle que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \ell$, $n \to \infty$. Montrer que $(x_n)^{1/n} \to \ell$, $n \to \infty$.