

TD M41 Séries

Série 1 – Suites numériques

Exercice 1

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour les suites $\{x_n\}_{n \geq 1}$ suivantes:

1. $x_n = \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5}$;
2. $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$;
3. $x_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+2}$;
4. $x_n = n \cos \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^3}$;
5. $x_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$;
6. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$;
7. $x_n = n(\log(n+1) - \log(n))$;
8. $x_n = n \sin \frac{n\pi + 1}{n + \pi}$ [on pourra poser $n = 1/t$];
9. $x_n = n^{1/n}$ [Rappel: $a^b = e^{b \log a}$];
10. $x_n = n^2(\log(\sqrt{4n^2 + 3} - n) - \log(n))$;

Exercice 2

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour les suites suivantes, en fonction des paramètres a , α et β :

1. $x_n = a^n$;
2. $x_n = \frac{1 - a^n}{1 + a^n}$;
3. $x_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^{2^n})$ [Indication: montrer que $(1-a)x_n = 1 - a^{2^{n+1}}$];
4. $x_n = \frac{\log n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$;
5. $x_n = n^\beta \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$;
6. $x_n = \sqrt[n]{2^n + a^n}$, $a > 0$;
7. $x_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^\alpha}$ [Indication: $a^b = e^{b \log a}$];
8. $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$, $a > 0$;

Exercice 3*

Montrer que les suites

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont adjacentes, et que leur limite commune est irrationnelle.