Université de Toulon

DEUG MASS/MIAS M41: Séries

Examen du 10 septembre 2003

Problème I

Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$f_n(x) = \frac{n}{(x-n)^2 + n^2}.$$

a) Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x;$$

ce résultat vous surprend-il?

Problème II

On considère la série de fonctions $(\sum f_n)_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}, \qquad n \geq 0.$$

a) Etudier la convergence simple de $(\sum f_n)_n$ sur $[a,b]$, $0 \leq a < b < +\infty$, et montrer que si $a > 0$, la convergence est uniforme.

b) A l'aide d'un développement en éléments simples des $f_n(x)$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,b]$, $b > 0$.

Problème III

Soit la série entière réelle

$$\left(\sum \frac{x^n}{n!n}\right)_{n\geq 1}$$

a) Calculer son rayon de convergence R.

b) Soit

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}, \qquad |x| < R;$$

montrer que

$$S(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad |x| < R.$$

c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} = -\int_0^1 e^t \log t\,\mathrm{d}t.$$

Tournez la feuille.

Problème IV

Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et dérivable par morceaux.

b) Calculer ses coefficients de Fourier.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

d) Calculer les sommes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Barême: Ia: 2, Ib: 3; IIa: 2, IIb: 2; IIIa: 1, IIIb: 3, IIIc: 1; IVa: 1, IVb: 3, IVc: 1, IVd: 3.