Université de Toulon

DEUG MASS/MIAS M41: Séries

Examen du 20 juin 2003

Problème I

Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ donnée par

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}.$$

a) Montrer que $\{f_n\}_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que $\{f_n\}_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{nx^3}{1+nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2}$$

où $-\infty < a < b < +\infty$.

Problème II

On considère la série numérique $(\sum x_n)_n$ de terme général

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n\log(n+1)}, \qquad n \geq 1.$$

a) Montrer que $(\sum x_n)_n$ est convergente.

b) Soit $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$, $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ et $R_N = S - S_N$. Donner une majoration de R_N.

c) Pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{\mathrm{d}x}{x(\log(x))^\beta}$$

existe-t-elle? En déduire que $(\sum x_n)_n$ n'est pas absolument convergente.

Problème III

Soit la série entière $(\sum a_n z^n)_n$ où $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

a) Calculer son rayon de convergence.

b) La série converge-t-elle pour $|z| = 1$?

Tournez la feuille.

Les candidats choisiront de traiter IVa) ou IVb):

Problème IVa)

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, égale à x sur $[0,\pi]$.

a) Développer f en série de Fourier et étudier la convergence de la série.

b) Calculer les sommes:
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \qquad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4}.$$

c) Déduire de a) le développement en série de Fourier de la fonction impaire, 2π-périodique, égale à x^2 sur $[0,\pi]$.

Problème IVb)

Soit la série de fonctions $(\sum f_n)_n$ de terme général
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+1}.$$

a) Montrer que $(\sum f_n)_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Soit
$$S(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n^2+1};$$
S est-elle continue?

c) Calculer
$$\int_0^{\pi} S(x)\sin(px)\,\mathrm{d}x, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

d) Montrer que la série des dérivées $(\sum f_n')_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a,b]$ ne contenant aucun multiple entier de 2π.

e) Montrer que $(\sum f_n')_n$ ne converge pas sur $\mathbb{R}$.

Barême: I: 7, II: 7, III: 4, IVa) ou IVb): 6.
Aucune note supérieure à 20 ne sera délivrée.