Université de Toulon

**DEUG MASS/MIAS M41: Séries**

# Examen du 6 septembre 2002

## Problème I

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\Big(\sum \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Big)_n.$$

b) Développer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ en série entière sur l'intervalle $]-1,+1[$.

c) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^3} \qquad \forall x \in [0,1[.$$

## Problème II

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}, \qquad n \geq 1$$

où $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(\sum u_n)_n$ diverge si $p = 0$ ou $1$ en minorant $u_n$ par le terme général d'une série divergente.

b) Montrer que si $p \geq 3$ on a $u_n \leq \dfrac{1}{n^{p-1}}$; en déduire que la série $(\sum u_n)_n$ converge dans ce cas.

c) Etudier le cas $p = 2$.

## Problème III

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que

$$f(x) = x^2 \qquad \text{si } -\pi \leq x \leq \pi.$$

a) Montrer que $f$ est continue et dérivable par morceaux.

b) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de $f$.

d) En déduire les sommes suivantes:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \text{et} \quad S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$