Université de Toulon
**DEUG MASS/MIAS M41: Séries**

## Examen du 11 juin 2002

### Problème I

Soit la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-nx^3}$$

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$.

b) Calculer $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$; la suite converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

c) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$; retrouver le résultat de b).

### Problème II

a) Développer en série de Fourier la fonction $f$ $2\pi$-périodique, paire, égale à $\pi - x$ sur $[0,\pi]$.

b) Cette série converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ ?

c) Application: calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

d) Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

### Problème III

*Note:* on pourra éventuellement traiter les questions c), d) et e) indépendamment des questions a) et b).

a) Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2\ \forall n > 1$; calculer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Montrer que la série trigonométrique $\left(\sum \dfrac{n!}{n^n} 2^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}\right)_n$ converge $\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

c) En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n\right)_n$ est supérieur ou égal à 2.

d) Calculer le rayon de convergence de cette série entière en fonction de $\ell$.

e) La série $\left(\sum \dfrac{n!}{n^n}\,\mathrm{e}^n\right)_n$ est-elle convergente?