TD M4-5 – Option Physique Mathématique

Série 3 – Formes normales et bifurcations

Exercice 1

Soit $\mathcal{H}_2$ l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré 2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'opérateur

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{H}_2 &\to \mathcal{H}_2 \\ h(y) &\mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(y) Ay - Ah(y), \end{aligned}$$

dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image par L_A des vecteurs de base canoniques de $\mathcal{H}_2$.
2. Calculer le noyau de L_A.
3. Donner une décomposition $\mathcal{H}_2 = \operatorname{im} L_A \oplus \mathcal{G}_2$.
4. Déterminer une forme normale d'ordre 2 pour le système

   $$\dot{x} = \lambda - x^2 + \lambda x,$$

   et donner la transformation correspondante. Tracer le diagramme de bifurcation de la forme normale tronquée.

Exercice 2

On considère l'oscillateur de Van der Pol, écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \lambda x - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

- Montrer que les valeurs propres du système linéarisé autour de l'origine sont de la forme $a(\lambda) \pm \mathrm{i}\,\omega(\lambda)$ dans un voisinage de $\lambda = 0$, où $a(\lambda)$ change de signe en même temps que λ.
- Effectuer un changement de variable linéaire $z = \alpha x + \beta y$, $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, de telle manière que

  $$\dot{z} = (a(\lambda) + \mathrm{i}\,\omega(\lambda))z + g(z, \bar{z}),$$

  et déterminer le terme non-linéaire g.
- Lorsque $\lambda = 0$, déterminer la forme normale d'ordre 3.
- Ecrire la forme normale tronquée en coordonnées polaires, et discuter le comportement qualitatif dans un voisinage de $\lambda = 0$.