TD M4-5 – Option Physique Mathématique

Série 2 – Fonctions de Lyapunov

Exercice 1

On considère le pendule amorti:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta = 0, \qquad \alpha \geqslant 0.$$

1. Montrer que l'énergie

$$E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta$$

   est une fonction de Lyapunov pour l'origine. Que peut-on en conclure?
2. Améliorer ce résultat à l'aide d'une fonction de Lyapunov de la forme

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\big(\dot{\theta}^2 + \beta\dot{\theta}\sin\theta - \gamma\cos\theta\big).$$

   Indication: Annuler le terme en $\dot{\theta}\sin\theta$ de $\dot{V}$.

Exercice 2

On considère les equations de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \qquad r \geqslant 0,\ b,\sigma > 0. \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned}$$

En utilisant une fonction de Lyapunov de la forme

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\big(x^2 + \beta y^2 + \beta z^2\big),$$

donner des conditions suffisantes pour que l'origine soit globalement asymptotiquement stable.
Rappel: $2xy \leqslant x^2 + y^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.