

TD M4-5 – Option Physique Mathématique**Série 1 – Evolution des volumes, points stationnaires**

On considère les systèmes dynamiques suivants.

1. Pendule amorti:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin \theta = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

2. Application logistique:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad \lambda \in [0, 4], x \in [0, 1].$$

3. Equations de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad r \geq 0, b, \sigma > 0.$$

4. Application standard:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}, \\ p_{n+1} &= p_n - \varepsilon q_n, \end{aligned} \quad \varepsilon \geq 0.$$

5. Oscillateur de Van der Pol:

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

6. Application de Fibonacci:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Pour chaque système, on demande de:

- Ecrire, si nécessaire, le système sous forme standard $\dot{x} = f(x)$ ou $x_{n+1} = F(x_n)$.
- Déterminer si le système est conservatif, dissipatif.
- Trouver les points d'équilibre.
- Linéariser le système autour de chaque point d'équilibre, et donner la dimension des espaces stable, central et instable en fonction de la valeur des paramètres.