TD M32 Analyse

Série 8 – Fonctions implicites, extrêma liés

Exercice 1

A l'aide du théorème des fonctions implicites, déterminer si les équations ci-dessous admettent une solution unique de la forme $y = \varphi(x)$ au voisinage du point (a, b). Le cas échéant, donner un développement limité d'ordre 2 de $\varphi(x)$ en $x = a$.

1. $x^2 - 2xy = 0,$ $\quad (a, b) = (2, 1);$
2. $y^2 - 3xy + 2 = 0,$ $\quad (a, b) = (1, 1);$
3. $y^2 - 2xy + 1 = 0,$ $\quad (a, b) = (1, 1);$
4. $x^2 + y^2 - 1 = 0,$ $\quad (a, b) = (1, 0);$
5. $\ln(1 + x - y^2) + \mathrm{e}^{x+y} + x - 1 = 0,$ $\quad (a, b) = (0, 0);$
6. $xy - y^3 = 0,$ $\quad (a, b) = (0, 0).$

Exercice 2

Déterminer lesquels des domaines suivants sont convexes.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, y \leqslant 1 - x\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}.$

Exercice 3

Trouver le minimum de la fonction f sous la contrainte indiquée.

1. $f(x, y) = xy,$ $\quad x^2 + 2y^2 = 1;$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2,$ $\quad x^4 + 9x^2y^2 - y^4 = 17;$
3. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2z^2,$ $\quad x + y + z = 1.$

Exercice 4

1. Parmi tous les triangles rectangles d'aire A donnée, déterminer celui qui a la plus petite hypothénuse.
2. Ecrire le nombre 512 comme le produit de trois nombres dont la somme est minimale.
3. On considère un triangle de côtés a, b et c et de périmètre $2p = a + b + c$ fixé.
   (a) Sachant que son aire est donnée par $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, déterminer a, b et c de telle manière que A soit maximale.
   (b) Soit P un point à l'intérieur du triangle, dont les distances aux trois côtés sont données par x, y et z. Sachant que $ax + by + cz = 2A$, déterminer x, y et z de manière que leur produit soit maximal.

Exercice 5*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que toutes les solutions de l'équation $f(x, y, z) = 0$ peuvent s'écrire sous les formes $x = X(y, z)$, $y = Y(x, z)$ et $z = Z(x, y)$. Montrer que

$$\frac{\partial X}{\partial y}(y, z)\frac{\partial Y}{\partial z}(x, z)\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) = -1.$$