TD M32 Analyse

Série 7 – Extrêma, convexité

Exercice 1

Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous, on demande de

- trouver les points stationnaires;
- déterminer leur nature (maximum, minimum, autre?);
- déterminer lesquelles de ces fonctions sont convexes;
- que peut-on en conclure sur les extrêma globaux?

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$;
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$;
3. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$;
4. $f(x, y) = xy + 1/x - 1/y$;
5. $f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$;
6. $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$.

Exercice 2

1. Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.
2. Peut-on déterminer leur nature sans faire de calculs?
3. Qu'en est-il de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x/y) \cos(x^2 + y^2)$?

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Calculer les dérivées partielles $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$.
- Peut-on prolonger ces dérivées par continuité en $(x, y) = (0, 0)$?
- Calculer
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$
  Que peut-on en conclure?
- La fonction f admet-elle un extrêmum en $(x, y) = (0, 0)$?

Exercice 4*

On considère les droites

$$d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - t,\ y = 3 + t,\ z = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - s,\ y = 2 - st,\ z = 3 + s,\ s \in \mathbb{R}\}.$$

1. Exprimer la distance entre deux points de d_1 et d_2 en fonction des paramètres t et s.
2. Montrer que cette distance admet un minimum global.
3. Calculer ce minimum, et les points où il est atteint.