TD M32 Analyse

Série 6 – Formule de Taylor

Exercice 1

Calculer les développements limités à l'ordre 3 autour de (a,b) des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$, $\quad (a,b) = (1,1)$;
2. $f(x,y) = x^2y^2$, $\quad (a,b) = (1,2)$;
3. $f(x,y) = \sin(2x+3y)$, $\quad (a,b) = (0,0)$.

Exercice 2

A l'aide de la formule de Taylor, donner des valeurs approchées des nombres suivants:

1. $\alpha = \sqrt{(5{,}03)^2 + (11{,}98)^2}$;
2. $\beta = (0{,}98)^{2{,}03}$;
3. $\gamma = \cos((0{,}99\pi)/2{,}04)$.

Exercice 3

Calculer les développement limités à l'ordre 2 des fonctions suivantes autour d'un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$;
2. $f(x,y) = xy + 1/x - 1/y$;
3. $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$;
4. $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)$.

Exercice 4

On considère les fonctions

$$f(x) = \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}t.$$

- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- En déduire $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Exercice 5

On se donne les points $A = (1,1)$, $B = (2,2)$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Déterminer le point C sur le segment AB tel que

$$f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot (B - A).$$

Exercice 6*

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^a$ est dite homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ si $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Montrer que si f est homogène de degré $k \geqslant 1$, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $k - 1$.
2. Donner des exemples de fonctions homogènes de degré k.