TD M32 Analyse

Série 5 – Dérivées partielles, différentielles

Exercice 1

Pour les fonctions ci-dessous, on demande de

- donner le domaine de définition;
- calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y);$$

- donner les dérivées directionnelles et la différentielle de f au point (a,b);
- déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f en (a,b).

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(a,b) = (1,1)$;
2. $f(x,y) = xy$, $(a,b) = (0,1)$;
3. $f(x,y) = \sin(2x+3y)$, $(a,b) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$, $(a,b) = (1,2)$;
5. $f(x,y) = x^y$, $(a,b) = (1,1/2)$;
6. $f(x,y) = \mathrm{th}(y/x)$, $(a,b) = (2,1)$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

- f est-elle continue en $(0,0)$?
- calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y);$$

- f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3

Calculer les différentielles des fonctions suivantes au point y_0:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, t)$, $y_0 = 0$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2)$, $y_0 = (1,\pi)$;
3. $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $h(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_2, x_3x_4)$, $y_0 = (1,1,-1,-1)$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2+x^4}{x^2+y^2+xy^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculer toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?