TD M32 Analyse

Série 4 – Continuité, compacité

Exercice 1

Pour les fonctions ci-dessous, on demande de

- donner le domaine de définition;
- calculer $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f_i(x,y))$ et $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f_i(x,y))$;
- calculer $\lim_{t\to 0} f_i(t,ct)$ en fonction de $c \in \mathbb{R}$;
- donner le domaine maximal dans lequel f est continue.

$$f_1(x,y) = \mathrm{e}^{xy}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x+y+1}{x^2+1},$$

$$f_3(x,y) = \frac{x^2-y^3}{(x-y)^2}, \qquad f_4(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

$$f_5(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \qquad f_6(x,y) = \frac{x^2-xy^2+y^4}{x^2+y^4}.$$

Exercice 2

Tracer les courbes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont compacts.

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leqslant x^2 + 2y^2 \leqslant 2\}$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y = 1\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^4 + 3z^6 = 1\}$;
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^4 + 3y^4 + z^2 < 2\}$;
5. L'image de l'ensemble $[1,2] \times [\pi/2, 3\pi/4]$ sous l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos y, x \sin y)$.

Exercice 4*

Soit $\mathbb{S}^1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ le cercle unité.

1. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est un compact.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{S}^1$ (c'est-à-dire qu'il existe $y \in \mathbb{S}^1$ et $z \in \mathbb{S}^1$ tels que $f(y) \leqslant f(x) \leqslant f(z)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$).
3. Montrer qu'il existe un point $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.
   Indication: Considérer $g(x) = f(x) - f(-x)$.
4. Sous quelles conditions ces résultats restent-ils valables pour la sphère unité $\mathbb{S}^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$?
   Interpréter ces résultats dans le cas d'une distribution de température à la surface de la terre.