TD M32 Analyse

Série 3 – Suites

Exercice 1

Discuter la convergence et calculer les limites des suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

$$x_n = \left(2^{-n}, \frac{2n}{n+1}\right); \qquad y_n = \left(\frac{\cos n}{n}, \frac{\sin n}{n}\right); \qquad z_n = \left(\sin\frac{1}{n}, n\right);$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x-y)+2, \frac{1}{2}(x+y)+1\right)$$

- Montrer que f est contractante;
- calculer le point fixe de f;
- si $(x_0, y_0) = (2,0)$ et $(x_{k+1}, y_{k+1}) = f(x_k, y_k)$, quelle est la limite de la suite des (x_k, y_k)?

Exercice 3*

Soit $c > 0$. Le but de l'exercice est d'obtenir une approximation numérique de $\sqrt{c}$. On considère la fonction

$$F_c(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{2x}.$$

- Vérifier que F_c admet $\sqrt{c}$ comme point fixe;
- Montrer F_c est contractante dans un domaine contenant $\sqrt{c}$, que l'on précisera.
- Montrer que
$$\frac{F_c(x)-\sqrt{c}}{F_c(x)+\sqrt{c}} = \left(\frac{x-\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}\right)^2.$$
- On pose $x_0 = 1$, $x_{k+1} = F_2(x_k)$, et $y_k = (x_k - \sqrt{2})/(x_k + \sqrt{2})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Exprimer y_k en fonction de y_0. Combien d'itérations faut-il effectuer pour calculer $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-4}? de 10^{-8}?
- La méthode ci-dessus est un cas particulier de la *méthode de Newton*: pour trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$, on calcule les itérés de la suite
$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Donner une interprétation graphique. Sous quelles conditions sur f et ses dérivées F est-elle contractante? Quelle est la fonction f correspondant au cas particulier étudié ci-dessus?
- Proposer une méthode pour calculer $1/c$.