

TD M32 Analyse

Série 2 – Topologie

Exercice 1

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \text{ et } x > 0\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1 \text{ et } x > 0\}$;
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ et } c < y < d\}$;
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$;
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } c < y < d\}$.

Exercice 2

Dessiner \mathcal{A} , \mathcal{A}° , $\partial\mathcal{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$ et $(\bar{\mathcal{A}})^\circ$ pour les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 :

1. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } c < y < d\}$;
2. $\mathcal{A} =]0, 1[\cup \{2\} \times \{0\}$;
3. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$;

Exercice 3

Dessiner l'image de l'ensemble $[1, 2] \times [\pi/2, 3\pi/4]$ sous l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Cette image est-elle un fermé?

Exercice 4*

Soit \mathcal{E} l'ensemble des stations de métro de Paris. Pour $x, y \in \mathcal{E}$, on note $d(x, y)$ la longueur du plus court chemin de x à y en métro. Montrer que $d(x, y)$ est une distance sur \mathcal{E} .

Même question si $d(x, y)$ désigne le nombre minimal de stations de métro entre x et y (préciser si l'on doit compter la première et/ou la dernière station du parcours).