TP M26 Calcul matriciel

TP 4 – Matrice exponentielle

Soit A une matrice carrée $(n \times n)$. On appelle exponentielle de A la matrice

$$\mathrm{e}^{A} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k,$$

où I est la matrice identité, et $k! = k \cdot (k-1) \ldots 2 \cdot 1$ $(0! = 1! = 1)$.
MATLAB fournit la commande `expm(A)` pour calculer l'exponentielle de la matrice `A`.

1. Propriétés élémentaires

On se donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vérifier les propriétś suivantes:

- $\mathrm{e}^{0A} = I$.
- e^{-A} est la matrice inverse de e^{A}.
- $\mathrm{e}^{sA}\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{(s+t)A}$, où $s, t \in \mathbb{R}$ (on choisira des valeurs quelconques pour s et t).
- $\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} \neq \mathrm{e}^{A+B}$.
- Quelle est la relation entre les valeurs propres et les vecteurs propres de B et de e^{B}?

2. Equations différentielles linéaires

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$\mathrm{e}^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots$$

Sa dérivée vaut

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{e}^{tA} = 0 + A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \cdots = A\,\mathrm{e}^{tA}.$$

- Vérifier (sur une feuille) que si x_0 est un vecteur colonne approprié, alors $x(t) = \mathrm{e}^{tA}\,x_0$ est la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ avec condition initiale $x(0) = x_0$.
- Représenter graphiquement $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (pour la matrice A du point 1. et une condition initiale au choix).

3. Oscillateur harmonique amorti

On considère l'équation de l'oscillateur hamonique amorti,

$$\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}.$$

- Soit $y = \dot{x}$. Ecrire cette équation comme un système de premier ordre pour $z = (x, y)$. Ecrire ce système sous forme matricielle.
- Représenter graphiquement $x(t)$, $y(t)$ et y en fonction de x pour $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et les valeurs suivantes de paramètres:
  a. $k = 1$, $\lambda = 0$;
  b. $k = 1$, $\lambda = 1$;
  c. $k = 1$, $\lambda = 2$;
  d. $k = 1$, $\lambda = 4$;
  e. $k = 0$, $\lambda = 1$;
  f. $k = -1$, $\lambda = 1$.