TP M26 Calcul matriciel

TP 3 – Valeurs propres et vecteurs propres

Quelques commandes de MATLAB utiles pour ce TP:

- `lambda = eig(A)`: définit un vecteur `lambda` contenant les valeurs propres de `A`;
- `[V,L] = eig(A)`: définit une matrice `V` contenant les vecteurs propres de `A`, et une matrice diagonale `L` contenant ses valeurs propres;
- `A(:,1), A(1,:), A(1,1)`: première colonne/ligne de `A`, premier élément de `A`;
- `A = [B C]`: appond deux matrices ayant même nombre de lignes;
- pour représenter graphiquement une fonction $f(t)$ sur $[0, 2\pi]$, on pourra utiliser
```
x = []; for t=0:0.1:2*pi x=[x f(t)]; end
plot(x','-')
```
- `sqrt(a)` calcule la racine carrée d'un nombre `a`.

1. Calculs élémentaires

Calculer les valeurs et vecteurs propres de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et vérifier les résultats.

Si `V` et `L` contiennent respectivement les vecteurs propres et valeurs propres de `A`, calculer `A*V` et `V*L` et expliquer le résultat.

2. Oscillateur harmonique

- Vérifier (sur une feuille) que les fonctions du type $x(t) = a\cos(\omega t + \delta)$ sont solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} = -\omega^2 x$.
- Représenter $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ graphiquement pour deux ou trois valeurs différentes de a, ω et δ.
- Représenter les points $(x(t), \dot{x}(t))$ sur un graphe à deux dimensions.

3. Chaîne d'oscillateurs

On considère trois masses reliées par des ressorts de longueur au repos 1. Les déplacements par rapport aux positions de repos obéissent aux équations

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2}(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m_3}(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

- Ecrire ce système sous forme matricielle $\ddot{x} = Ax$;
- montrer que si v est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $x(t) = \cos(\omega t)v$, avec $\omega = \sqrt{-\lambda}$ est une solution de l'équation (appelée un mode propre);
- dans le cas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A, et représenter graphiquement les différents modes propres;
- mêmes questions pour $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 = 2$ et pour $m_1 = m_2 = 2$ et $m_3 = 1$.
- On procédera éventuellement de même pour une chaîne de cinq oscillateurs.