TP M26 Calcul matriciel

TP 2 – Systèmes d'équations linéaires

MATLAB propose la commande `x=A\b` afin de résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$. Dans ce TP, nous allons explorer les propriétés de cette commande.

1. Systèmes carrés

Dans la série 2, nous avons résolu les systèmes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

- Résoudre ces équations à l'aide de MATLAB et interpréter les résultats.
- Les commandes `det(A)` et `inv(A)` permettent de calculer le déterminant et la matrice inverse de `A`. Quelle est leur utilité dans la résolution des équations ci-dessus?
- Montrer que si `A = pascal(n)`, l'équation $Ax = b$ admet toujours une solution.

2. Systèmes sous-déterminés

Un système est dit sous-déterminé s'il admet plus d'inconnues que d'équations.

- Résoudre le système

  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

  analytiquement, puis avec MATLAB. Comparer les résultats.
- Calculer `u = null(A)` et `v = null(A, 'r')` (A est la matrice intervenant dans le système linéaire). Calculer `A * u` et `A * v` et discuter les résultats.
- Montrer que si x est solution de l'équation, alors $x + \lambda v$ est solution pour tout λ. Vérifier ce résultat numériquement.

3. Systèmes surdéterminés

Un système est dit surdéterminé s'il admet plus d'équations que d'inconnues.

- Résoudre le système

  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

  analytiquement, puis avec MATLAB. Comparer les résultats.
  Explication: MATLAB calcule une solution approchée à l'aide de la "méthode des moindres carrés".
- Les données suivantes sont les mesures d'une population y en fonction du temps t:

t	0.0	0.3	0.8	1.1	1.6	2.3
y	0.82	0.72	0.63	0.60	0.55	0.5

  On fait l'hypothèse que $y \simeq c_1 + c_2 e^{-t}$, aux erreurs de mesure près. On demande d'estimer les coéfficients c_1 et c_2.
  Indication: Ecrire c_1 et c_2 comme les solutions d'un système de 6 équations linéaires.