TD M1 – Algèbre

Série 9 – Les groupes SO(2) et U(1)

On dénote par SO(2) le groupe des matrices orthogonales 2×2 de déterminant 1, et par U(1) celui des "matrices" unitaires 1×1 (i.e., des nombres complexes de module 1).

Exercice 1

1. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer, par récurrence, A^k pour $k > 1$. En déduire une expression explicite pour
$$\mathrm{e}^{A\varphi} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varphi^k}{k!} A^k$$
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R} & \to & \mathrm{SO}(2) \\ & \varphi & \mapsto & \mathrm{e}^{A\varphi} \end{array}$$
est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathrm{SO}(2), \cdot)$. Quel est son noyau? En conclure que $\mathrm{SO}(2) \simeq \mathrm{U}(1)$.

Exercice 2

1. Montrer que toutes les représentations continues de dimension 1 de SO(2) dans les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sont de la forme
$$\pi_k(\mathrm{e}^{A\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
2. Soit $\mathcal{P}_0$ l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On définit l'application
$$\begin{array}{rccc} T_\varphi : & \mathcal{P}_0 & \to & \mathcal{P}_0 \\ & f(x) & \mapsto & f(x+\varphi) \end{array}$$
Montrer que $\pi(\mathrm{e}^{A\varphi}) = T_\varphi$ définit une représentation de SO(2) dans $\mathcal{P}_0$.
3. Montrer que
$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\pi_k(\mathrm{e}^{A\varphi})} \pi(\mathrm{e}^{A\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi$$
est un projecteur et calculer son image.
4. A l'aide du théorème de Dirichlet sur les séries de Fourier, montrer que
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k = \mathrm{id}$$
et en déduire que
$$\pi = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k.$$
5. Soit $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit l'opérateur linéaire
$$\begin{array}{rccc} L : & \mathcal{P}_2 & \to & \mathcal{P}_0 \\ & f(x) & \mapsto & f''(x) \end{array}$$
Montrer que L commute avec T_φ pour tout φ et en déduire ses fonctions propres et valeurs propres.