TD M1 – Algèbre

Série 8 – Diagonalisation en présence de symétries

Exercice 1

1. Montrer que le groupe diédral D_4 est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permuations $\mathcal{S}_4$.
   Indication: Considérer l'action de D_4 sur les sommets d'un carré centré à l'origine, numérotés de 1 à 4.
2. Soit π la représentation de D_4 induite par la représentation fondamentale de $\mathcal{S}_4$. Calculer les caractères χ de π.
3. Soient $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(5)}$ les caractères des 5 représentations irréductibles de D_4 (c.f. série 10). Calculer $\langle \chi^{(i)}, \chi \rangle$ pour $i = 1, \dots, 5$ et en déduire la décomposition de π en représentations irréductibles de D_4.
4. Déterminer, pour chaque sous-représentation irréductible, une base du sous-espace invariant correspondant.
5. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix}.$$
   Montrer que A commute avec $\pi(g)$ pour tout $g \in D_4$.
6. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 2

On se donne des nombres complexes $a_1, \dots a_n$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A.
Indication: Soit π la représentation fondamentale du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$. Déterminer la décomposition de π en représentations irréductibles, ainsi que les sous-espaces invariants associés.
Application: Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

("Laplacien" discrétisé sur réseau en dimension 1).