TD M1 – Algèbre

Série 7 – Caractères et représentations irréductibles des groupes diédraux

Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, de sommets $P_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k/n}$, $k = 0, \dots n-1$. On appelle *groupe diédral* d'ordre n le groupe D_n des transformations orthogonales laissant $\mathcal{P}$ invariant.

On dénote par ρ la rotation d'angle $\alpha = 2\pi \mathrm{i}/n$ (multiplication par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$), et par σ la réflexion par rapport à la droite contenant 0 et P_0 (conjugaison conplexe). On a donc

$$\rho(P_k) = P_{k+1}, \qquad \sigma(P_k) = P_{n-k}.$$

1. Montrer que le sous-groupe de D_n engendré par ρ est isomorphe à $\mathbb{Z}_n$.
2. Montrer que $D_n = \{e, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$.
   Indications:
   - Montrer que toutes ces isométries sont distinctes en considérant l'image des vecteurs $u = \overline{OP_0}$ et $v = \overline{OP_1}$ qui forment une base du plan.
   - Soit $\tau \in D_n$, alors $\tau(u) = \overline{OP_j}$ et $\tau(v) = \overline{OP_{j+1}}$ ou $\overline{OP_{j-1}}$; en conclure que $\tau = \rho^j$ ou $\rho^j\sigma$.

   On a donc $|D_n| = 2n$.
3. Le groupe D_n est-il abélien?
   Indication: Est-ce que $\sigma\rho = \rho\sigma$?
4. Montrer qu'une représentation π de D_n est entièrement déterminée par deux matrices R et S telles que $R^n = I = S^2$ et $SR^{-1} = RS$.
   Indication: $R = \pi(\rho)$ et $S = \pi(\sigma)$.
5. Déterminer toutes les représentations de dimension 1 de D_n.
6. Déterminer toutes les représentations irréductibles de dimension 2 de D_n.
   Indications: $R = \pi(\rho)$ et $S = \pi(\sigma)$ sont unitaires. Travailler dans une base orthonormée telle que R soit diagonale. Montrer que

$$R = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   avec $\theta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}j/n}$. Distinguer les cas n pair et n impair.
7. Déterminer toutes les représentations irréductibles de D_n.
   Indication: Compter les représentations obtenues en 5. et en 6. et utiliser la relation de fermeture.
8. Ecrire la table des caractères irréductibles de D_n.
9. Ecrire les relations d'orthogonalité des caractères irréductibles.