TD M1 – Algèbre

Série 6 – Les groupes symétriques

Soit $\mathcal{S}_N$ le groupe des permutations de $\{1,\dots,N\}$. Une permutation $g \in \mathcal{S}_N$ est appelée *k-cycle* s'il existe des éléments distincts $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,N\}$ tels que

$$g(i_1) = i_2,\ g(i_2) = i_3,\ \dots,\ g(i_k) = i_1,$$

et que g fixe tous les autres éléments de $\{1,\dots,N\}$. On la notera $g = (i_1,\dots,i_k)$.
On note $i_h(g) = hgh^{-1}$ l'automorphisme intérieur associé à h.

1. Montrer que si $g = (i_1,\dots,i_k)$ est un k-cycle, alors $i_h(g)$ est un k-cycle,

$$i_h(g) = (j_1,\dots,j_k)$$

   et déterminer $j_1,\dots,j_k$.
2. Montrer que deux cycles disjoints,

$$g_1 = (i_1,\dots,i_k), \quad g_2 = (j_1,\dots,j_l), \quad \{i_1,\dots,i_k\} \cap \{j_1,\dots,j_l\} = \emptyset$$

   commutent.
3. Montrer que deux k-cycles sont conjugués:
   g_1, g_2 k-cycles $\Rightarrow g_2 = i_h(g_1)$ pour un $h \in \mathcal{S}_N$.
4. Soient $g_1,\dots,g_n$ des cycles disjoints deux à deux, de longueur $k_1,\dots,k_n$. Montrer que $\prod_{i=1}^n g_i$ ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Montrer que $i_h(g)$ est un produit de n cycles disjoints $g'_1,\dots,g'_n$ de longueur $k_1,\dots,k_n$.
5. Montrer que toute permutation $g \in \mathcal{S}_N$ s'écrit comme un produit de cycles disjoints, cette représentation étant unique à l'ordre des facteurs près.

On appelle *partition ordonnée* de N une suite d'entiers $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k > 0$ telle que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = N$. Soit $g \in \mathcal{S}_N$. On dit que g est de type $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_k \rangle$ si g est un produit de k cycles disjoints de longueur $\alpha_1,\dots,\alpha_k$.

6. Monter que si $g, g' \in \mathcal{S}_N$, g est conjugué à g' ssi g et g' sont de même type.
7. Montrer que le nombres de classes de conjugaison de $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire le nombre de représentations irréductibles de $\mathcal{S}_N$, est égal au nombre de partitions ordonnées de N.
8. Donner le cardinal des différentes classes de conjugaison et écrire l'équation des classes pour $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.
9. Déterminer le nombre de représentations irréductibles de $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ et $\mathcal{S}_5$. A l'aide de la relation de fermeture, donner leurs dimensions pour $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.