TD M1 – Algèbre

Série 5 – Produit tensoriel

Exercice 1

Soient n et m des entiers positifs. On se propose d'étudier le produit tensoriel

$$T = A \otimes B, \qquad A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad B = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

1. Montrer que
$$I = \{\lambda \in \mathbb{Z} : \lambda(a \otimes b) = 0, \forall a \in A, \forall b \in B\}$$
est un idéal de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $n \in I$ et $m \in I$. En déduire que $I = q\mathbb{Z}$, où q divise n et m.
3. Soit q un diviseur de n et m. Vérifier que
$$\begin{array}{rccc} \phi_q : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ & (a + n\mathbb{Z}, b + m\mathbb{Z}) & \mapsto & ab + q\mathbb{Z} \end{array}$$
définit une application bilinéaire de $A \times B$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $A \otimes B \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est le plus grand diviseur commun de n et m.
Indication: Utiliser la propriété universelle et l'application bilinéaire ϕ_p pour construire l'isomorphisme cherché.

Exercice 2

On se donne deux entiers $n, m \geqslant 2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0\}$.
3. Montrer que $n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un sous-module de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. A l'aide de l'application bilinéaire
$$\begin{array}{rccc} \phi : & n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & (na, b + m\mathbb{Z}) & \mapsto & nab + m\mathbb{Z}, \end{array}$$
établir les relations
$$n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq p\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(m/p)\mathbb{Z}$$
où p est le plus grand diviseur commun de n et m.