TD M1 – Algèbre

Série 5 – Représentation de dimension 1

Exercice 1: Groupe des commutateurs d'un groupe G

Soit G un groupe (multiplicatif). Pour $a, b \in G$, on appelle

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

le *commutateur* de a et b.

1. Montrer que $[b, a] = [a, b]^{-1}$.
2. Montrer que $G' = \{[a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_k, b_k] \colon k = 1, 2, \ldots ; a_i, b_i \in G\}$ est un sous-groupe distingué de G.
3. Montrer que G est abélien ssi $G' = \{e\}$.
4. Montrer que G/G' est abélien.
5. Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué tel que G/H est abélien, alors $G' \subset H$.

Exercice 2

Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe distingué.

1. Montrer que si $\tilde{\pi}$ est une représentation de G/H, alors $\pi : g \mapsto \tilde{\pi}(gH)$ est une représentation de G et $\mathrm{Ker}(\pi) \supset H$.
2. Montrer que $gH \mapsto \pi(g)$ est une représentation de G/H ssi $H \subset \mathrm{Ker}(\pi)$.
3. Soit G un groupe et G' son commutateur. Montrer qu'une représentation irréductible π de G est de dimension 1 ssi π est une représentation de G/G', c'est-à-dire $G' \subset \mathrm{Ker}(\pi)$.

Exercice 3

Soient π_1 et π_2 deux représentations du groupe G dans $\mathbb{C}^1$.
Montrer que $\pi_1 \neq \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \not\simeq \pi_2$.

Exercice 4

Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Exercice 5

Montrer que

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

définit une représentation de $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer ses sous-représentations irréductibles.