TD M1 – Algèbre

Série 4 – Radicaux, anneaux artiniens

Exercice 1

Soit Λ un anneau et $I \subset \Lambda$ un idéal à gauche.
Montrer que si $1 + a$ possède un inverse à gauche pour tout $a \in I$, alors $1 + a$ possède un inverse à droite pour tout $a \in I$, et que ces inverses coïncident.
Indication: Soit $a \in I$ et $b \in \Lambda$ tel que $b(1 + a) = 1$. Utiliser le fait qu'on a également $-ba \in I$, donc $1 - ba$ admet un inverse à gauche c. Considérer $cb(1 + a)$.

Exercice 2

Soit Λ un anneau et $I \subset \Lambda$ un idéal à gauche. Montrer que

$$I \subset \mathrm{Rad}(\Lambda) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + a \text{ est inversible } \forall a \in I.$$

Indications:
$\Rightarrow$: Montrer que $\Lambda(1 + a) = \Lambda$.
$\Leftarrow$: Soit J un idéal à gauche maximal tel que $I \not\subset J$, et soit $M = \Lambda/J$. Montrer que $IM = M$ et en déduire une contradiction. Rappel: J étant maximal, M est simple, donc cyclique.

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $T_n(\mathbb{K}) = \{(a_{ij})\colon a_{ij} = 0 \text{ pour } i < j\}$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $T_n(\mathbb{K})$ est un anneau.
2. Montrer que $T_n(\mathbb{K})$ est artinien.
   Indication: $T_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Montrer que $N = \mathrm{Rad}(T_n(\mathbb{K}))$ est l'ensemble des matrices de $T_n(\mathbb{K})$ telles que $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$. Montrer que $N^{n-1} \neq 0$ et que $N^n = 0$.
   Indication: Utiliser l'exercice 2.
4. Quels sont les idéaux maximaux de $T_n(\mathbb{K})$?
5. Montrer que $T_n(\mathbb{K})/N \simeq \prod_{i=1}^n K_i$ avec $K_i \simeq \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. En déduire que $T_n(\mathbb{K})$ possède n modules simples.
6. Soit $I_k = \{(a_{ij}) \in T_n(\mathbb{K})\colon a_{ij} = 0, j \neq k\}$. Montrer que c'est un idéal à gauche, et que $I_k \simeq I_{k'} \Leftrightarrow k = k'$.