TD M1 – Algèbre

Série 3 – Modules d'Artin

Exercice 1

Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas artinien.

Exercice 2

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $0 < \dim(V) < \infty$, et $T \in \mathcal{L}(V)$.
Soit $\Lambda_T = \{p(T)\colon p \in \mathbb{K}[x]\}$. Alors V est un Λ_T-module pour l'action

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_T \times V & \to & V \\ (p(T), u) & \mapsto & p(T)u \end{array}$$

V est donc également un $\mathbb{K}[x]$-module.

1. Montrer que $X \subset V$ est un sous-module ssi X est un sous-espace vectoriel invariant par T: $TX \subset X$.
2. Montrer que V est un Λ_T-module artinien.
3. Soit $X \subset V$ un sous-module. Montrer que
$$I_X = \{p \in \mathbb{K}[x]\colon p(T)u = 0 \ \forall u \in X\}$$
est un idéal de $\mathbb{K}[x]$.
4. Montrer que $\Lambda_T \simeq \mathbb{K}[x]/I_V$.
5. On dénote par $p_X \in \mathbb{K}[x]$ l'unique générateur normalisé de l'idéal I_X. Montrer que si $Y \subset X$, alors p_Y divise p_X.
6. Soit $X \subset V$ un sous-module. Montrer que si p_X n'est pas irréductible, alors X n'est pas simple. En conclure que si le sous-module $X \subset V$ est simple, alors p_X est un facteur irréductible de p_V (p_V est appelé le *polynôme minimal* de T).
7. Dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, et $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (dans la base canonique), déterminer p_V et Λ_T. V est-il un Λ_T-module simple?
8. Soit $p_V = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ la décomposition de p_V en facteurs irréductibles.
   - Montrer que si $X_i \subset \mathrm{Ker}(p_i(T))$ est un sous-module, alors $p_{X_i} = p_i$.
   - Montrer que si X_i est cyclique, alors il est simple.
   - En conclure que $X \subset V$ est simple si et seulement si X est un sous-module cyclique de $\mathrm{Ker}(P_i(T))$, $1 \leqslant i \leqslant k$.
9. On admet que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. Montrer que $X \subset V$ est un sous-module simple si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Tu = \lambda u \ \forall u \in X$, et $\dim(X) = 1$.