TD M1 – Algèbre

Série 3 – Classes de conjugaison

1. Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit l'application
$$i_g : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$
(conjugaison de h par g). Montrer que i_g est une bijection (automorphisme intérieur de G). Montrer que $\mathcal{I}(G) = \{i_g \colon g \in G\}$ est un groupe de transformations de G.
2. Le *centre* de G est défini par
$$Z(G) = \{g \in G \colon i_g = \mathrm{id}\}.$$
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G. Montrer que G est abélien ssi $G = Z(G)$.
3. Montrer que $\mathcal{I}(G) \simeq G/Z(G)$.
4. Les $\mathcal{I}(G)$-orbites de G sont appelées *classes de conjugaison* de G: $O_g = \{i_h(g) \colon h \in G\}$. Les éléments de O_g sont appelés *éléments conjugués* à g. Le *centralisateur* de $g \in G$ est défini par
$$C(g) = \{h \in G \colon i_h(g) = g\}.$$
Montrer que pour tout $g \in G$: $|O_g| = [G : C(g)]$.
5. Montrer que
$$g \in Z(G) \quad \Leftrightarrow \quad |O_g| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C(g) = G.$$
6. Si G est fini, soit $\mathcal{G} \subset G$ un système de représentants de l'ensemble $\mathcal{C}(G)$ des classes de conjugaison de G: $O_{g'} \neq O_g$ $\forall g \neq g' \in G$ et $G = \cup_{g \in \mathcal{G}} O_g$. Montrer que
$$|G| = \sum_{g \in \mathcal{G}} [G : C(g)] = \sum_{g \in \mathcal{G}} \frac{|G|}{|C(g)|}.$$
7. Montrer que $Z(G) \subset \mathcal{G}$ et en conclure
$$1 = \frac{|Z(G)|}{|G|} + \sum_{g \in \mathcal{G} \setminus Z(G)} \frac{1}{|C(g)|}$$
(equation des classes).
8. Un groupe fini tel que $|G| = p^\alpha$ avec p premier et $\alpha > 0$ est appelé *p-groupe*. Montrer que le centre d'un p-groupe contient plus d'un élément.
Indication: Montrer que p divise $|Z(G)|$ en utilisant l'équation des classes.