TD M1 – Algèbre

Série 2 – Groupes de transformations

Soit X un ensemble non vide. Une *transformation* de X est une bijection de X dans X. Un *groupe de transformations* de X est un ensemble G de transformations de X formant un groupe pour la composition des applications.

Exemples:

a. $X = \{1, \dots n\}$. Le groupe de toutes les transformations de X est S_n.

b. $X = \mathbb{R}^n$ comme espace affine. L'ensemble des translations $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $t : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto tx = (t_1 + x_1, \dots, t_n + x_n)$ est un groupe de transf. de X.

c. $X = \mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel ou affine. L'ensemble des rotations de centre O est un groupe de transformations de X: $G = \mathrm{SO}(n)$.

Soit G un groupe de transformations de X. Pour $x \in X$, $O_x = \{gx \colon g \in G\}$ est la G-*orbite* de x.

1. Montrer que la relation $x \sim y \Leftrightarrow x \in O_y$ est une équivalence. En conclure que les G-orbites forment une partition de l'ensemble X.
2. On dit que X est *homogène* relativement à G (ou encore que G *agit transitivement* sur X) s'il n'existe qu'une seule G-orbite. Montrer que a. et b. sont des exemples d'espaces homogènes. Déterminer les G-orbites de l'exemple c.
3. Montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble $G_x = \{g \in G \colon gx = x\}$ est un sous-groupe de G (le *stabilisateur* de x).
4. Montrer que si $x \sim y$, alors $G_x \simeq G_y$.
   Indication: Trouver une expression explicite de cet isomorphisme.
5. Montrer que $G/G_x \simeq O_x$ (comme ensemble). En déduire que si O_x est fini, alors $|O_x| = [G : G_x]$, l'*indice du stabilisateur* de x dans G ($|O_x| = |G|/|G_x|$ si G est fini).
   Rappel: $G/H \simeq H\backslash G$, avec l'isomorphisme $gH \mapsto Hg^{-1}$, et $[G : G_x] = |G/H| = |H\backslash G|$ ($= |G|/|H|$ si G est fini).
6. Soit $\mathcal{X}$ un système de représentants de $X/\sim$, i.e. $O_x \neq O_y$ $\forall x \neq y \in \mathcal{X}$ et $X = \cup_{x \in \mathcal{X}} O_x$. Montrer que si X est fini, on a l'*équation des classes:*
   $$|X| = \sum_{x \in \mathcal{X}} [G : G_x].$$
7. Pour $g \in G$, soit $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \colon gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de g. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des G-orbites de X ($\mathcal{O} \simeq X/\sim$). Montrer
   Théorème de Burnside: Si X et G sont finis,
   $$|G||\mathcal{O}| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$
   Indication: Soit $\Gamma = \{(g, x) \in G \times X \colon gx = x\}$. Calculer $|\Gamma| = \sum_{g \in G, x \in X, gx = x} 1$ de deux manières différentes.