TD M1 – Algèbre

Série 1 – Anneaux, idéaux

Exercice 1

Soient Λ, Λ' des anneaux et $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ un homomorphisme.

1. Montrer que si $\Gamma \subset \Lambda$ est un idéal, Λ/Γ est un anneau.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un idéal de Λ.
3. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \Lambda/\operatorname{Ker}(\varphi) & \to & \operatorname{Im}(\varphi) \\ & x + \operatorname{Ker}(\varphi) & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$
est un isomorphisme d'anneau.
4. Discuter le cas $\Lambda = \Lambda' = \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = x \pmod 3$.

Exercice 2

Soit Λ un anneau commutatif unitaire et Γ un idéal de Λ. On veut montrer
Théorème: Λ/Γ *est un corps* $\Leftrightarrow$ Γ *est maximal.*

1. Montrer que pour tout idéal $\Gamma \subset \Lambda$,
$$1 \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma = \Lambda.$$
2. Montrer qu'un idéal $\Gamma \subsetneq \Lambda$ ne contient aucun élément inversible.

Pour $a \in \Lambda$ et $\Gamma \subset \Lambda$ un idéal, on pose $\Gamma_a = \Gamma + \Lambda a$.

3. Montrer que Γ_a est un idéal tel que $\Gamma \subset \Gamma_a \subset \Lambda$, et que $\Gamma = \Gamma_a \Leftrightarrow a \in \Gamma$.
4. Montrer que $1 \in \Gamma_a \Leftrightarrow (a + \Gamma) \in \Lambda/\Gamma$ est inversible.
5. Montrer que Γ est maximal si et seulement si $\forall a \in \Lambda \setminus \Gamma \colon 1 \in \Gamma_a$.
6. Montrer que si Γ est maximal, Λ/Γ est un corps.
7. Montrer que si Λ/Γ est un corps, Γ est maximal.

Application: Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un corps?

Exercice 3

Soit Λ un anneau non-nul et $\Gamma \subset \Lambda$ un idéal à gauche propre (i.e. $\Gamma \neq \{0\}$ et $\Gamma \neq \Lambda$). Montrer qu'il existe un idéal maximal $\bar{\Gamma}$ tel que
$$\Gamma \subset \bar{\Gamma} \subsetneq \Lambda$$

Indications: Soit E un ensemble ordonné par $\preccurlyeq$. On appelle *chaîne* tout sous-ensemble non-vide de E totalement ordonné par la relation $\preccurlyeq$. E est *inductivement ordonné* si toute chaîne C de E possède une borne supérieure ($\exists \bar{x} \in C$ t.q. $\forall x \in C \colon x \preccurlyeq \bar{x}$).
Lemme de Zorn: *Si* $(E, \preccurlyeq)$ *est inductivement ordonné, alors* $\forall a \in E$ *il existe un élément maximal* $m \in E$ *tel que* $a \preccurlyeq m$.
Soit $E = \{I \colon \Gamma \subset I \subsetneq \Lambda,\ I \text{ idéal à gauche}\}$, ordonné par l'inclusion. Montrer que si $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une chaîne, alors $\bar{I} = \cup_{\alpha \in A} I_\alpha$ est un idéal. Montrer que I est la borne supérieure de $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$. Appliquer le lemme de Zorn.