TD M1 – Algèbre

Série 12 – Transformations de Lorenz et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Rappelons les matrices de Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{R}^3$, on notera $n \cdot \sigma = \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_i$. Pour $x \in \mathbb{R}^4$, $x \cdot \sigma$ désigne $\sum_{i=1}^4 x_i \sigma_i$, où $\sigma_4 = \sigma_0 = I$.

On rappelle que $\mathrm{SO}(3,1)$ est le groupe des applications linéaires $T \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ préservant la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. T est appelé une transformation de Lorenz propre.

1. A un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$, on associe la matrice hermitienne $X = x \cdot \sigma$. Calculer $\det X$ et $\mathrm{Tr}(X^2)$.
2. Soit $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On lui associe l'application

$$\begin{array}{rccll} \Lambda(A): & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 & \\ & x & \mapsto & x' & \text{tel que } A(x \cdot \sigma)A^* = x' \cdot \sigma. \end{array}$$

   Montrer que $\Lambda(A) \in \mathrm{SO}(3,1)$.
3. Monter que Λ est un morphisme de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ vers $\mathrm{SO}(3,1)$ et calculer son noyau.
   Indication: Montrer que si $A \in \ker \Lambda$, alors $\mathrm{Tr}(A\sigma_j A^* \sigma_i) = 2\delta_{ij}$. En déduire que A est unitaire, et donc qu'elle commute avec $X = x \cdot \sigma$.
4. Soit $U \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ une matrice unitaire. Nous avons vu qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 tels que

$$U = \cos\frac{\alpha}{2} I + \mathrm{i}\,\sin\frac{\alpha}{2} n \cdot \sigma =: U(\alpha n).$$

   Montrer que $\Lambda(U)$ est une rotation (utiliser la série précédente).
5. Soit $H \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 tels que

$$H = \mathrm{ch}\,\frac{\eta}{2} I + \mathrm{sh}\,\frac{\eta}{2} n \cdot \sigma =: H(\eta n).$$

   Montrer que si $n, m \in \mathbb{R}^3$, alors $(n\cdot\sigma)(m\cdot\sigma) = (n\cdot m)I + \mathrm{i}(n \wedge m)\cdot\sigma$. En déduire $\Lambda(H)$ (on dit que c'est une transformation de Lorenz pure, de direction n et de rapidité η).
   Rappel: $\mathrm{ch}^2\frac{\eta}{2} + \mathrm{sh}^2\frac{\eta}{2} = \mathrm{ch}\,\eta$, $\mathrm{ch}^2\frac{\eta}{2} - \mathrm{sh}^2\frac{\eta}{2} = 1$ et $2\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta}{2} = \mathrm{sh}\,\eta$.
6. Soit $B = b_0 I + b \cdot \sigma$ une matrice hermitienne. Montrer que

$$\sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{2(b_0 + \sqrt{b_0^2 - \|b\|^2})}} \Big[\sqrt{b_0^2 - \|b\|^2} I + B\Big].$$

   En déduire que tout $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ s'écrit comme $A = HU$, avec H hermitienne et U unitaire.
   Indication: $H^2 = AA^*$.
7. **Application:** Soient $\Lambda_1 = \Lambda(H(\eta_1 n_1))$ et $\Lambda_2 = \Lambda(H(\eta_2 n_2))$ deux transformations de Lorenz pures. Montrer que $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda' R$, où Λ' est pure et R est une rotation. Quels sont leurs paramètres? Le calcul de Λ' donne la loi de composition des vitesses, celui de R la précession de Thomas.