TD M1 – Algèbre

Série 12 – Algèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

- Si $A \in \mathfrak{g}$, on dénote par $\mathrm{ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{ad}_A(X) = [A, X]$.
- Si $g \in G$, on dénote par $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$.

On a donc $\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^A} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_A}$.

Exercice 1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (abstraite) de dimension 2. Notons $\{X, Y\}$ une base de $\mathfrak{g}$.

1. Exprimer $[aX + bY, cX + dY]$ en fonction de $[X, Y]$.
2. Considérons le cas $[X, Y] = 0$. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On définit des matrices 4×4 par
$$\psi_1(X) = \psi_2(X) = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_3(X) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\psi_1(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \qquad \psi_2(Y) = \psi_3(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$
Montrer que ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Calculer $\mathrm{e}^{\psi_i(aX+bY)}$ pour chaque i. Quel est son noyau $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{e}^{\psi_i(aX+bY)} = I\}$? En déduire la topologie du groupe de Lie associé à la représentation ψ_i.
3. Passons au cas $[X, Y] \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $[A, B] = B$. Calculer le crochet de deux éléments quelconques de $\mathfrak{g}$.
4. Montrer que
$$\psi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est une représentation de $\mathfrak{g}$. Calculer $\mathrm{e}^{\psi(\alpha A + \beta B)}$. Montrer que le groupe de Lie ainsi construit est isomorphe au groupe des applications affines $x \mapsto ax + b$.
5. Soit $Y = \alpha A + \beta B$ et $g = \mathrm{e}^Y$. Calculer $\mathrm{Ad}_g(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Exercice 2

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension 3. On suppose qu'elle admet une base $\{P, Q, Z\}$ telle que
$$[P, Q] = \mathrm{i}Z, \qquad [P, Z] = [Q, Z] = 0.$$

- Calculer le commutateur de deux éléments quelconques de $\mathfrak{h}$.
- Montrer que
$$\psi(P) : f(x) \mapsto \mathrm{i}f'(x), \qquad \psi(Q) : f(x) \mapsto xf(x), \qquad \psi(Z) : f(x) \mapsto f(x)$$
est une représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- Calculer $\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^Y}(X)$ pour deux éléments quelconques X, Y de $\mathfrak{h}$.