TD M1 – Algèbre

Série 11 – Matrices de Pauli et le groupe SU(2)

Exercice 1

Les matrices de Pauli sont définies par

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\sigma_i\sigma_j$, $[\sigma_i, \sigma_j]$, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$ et $\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j)$ pour tout i, j.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$H(x_0, x) = x_0\sigma_0 + x \cdot \sigma = \sum_{x=0}^{3} x_i\sigma_i$$

   est une matrice hermitienne. Montrer que toute matrice hermitienne 2×2 peut s'écrire sous cette forme, et exprimer les x_i à l'aide de $\mathrm{Tr}(H\sigma_i)$.
3. Calculer le commutateur $[H(x_0, x), H(y_0, y)]$.

Exercice 2

1. Montrer que toute matrice $U \in \mathrm{SU}(2)$ s'écrit

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

2. Soit $H = H(x_0, x)$ une matrice hermitienne. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H}$ est unitaire. Sous quelle condition a-t-on $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H} \in \mathrm{SU}(2)$?
3. On pose $H = x \cdot \sigma$, pour $x \in \mathbb{R}^3$. Calculer H^2, puis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H}$.
4. Soit $H = r\hat{x} \cdot \sigma$ avec $r > 0$ et $\|\hat{x}\| = 1$. Soit $G = y \cdot \sigma$. Montrer que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}G}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}G'}$$

   où $G' = y' \cdot \sigma$. Déterminer $y' = y'(x, y)$ à l'aide de la formule des commutateurs emboîtés. Quelles sont les classes de conjugaison de SU(2)?
5. A tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on associe l'application

$$\begin{array}{llll} \phi(U): & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & y & \mapsto & y' \quad \text{tel que } U\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\sigma}\,U^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y'\cdot\sigma}. \end{array}$$

   Montrer que ϕ est une représentation de SU(2) dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer son image et son noyau. Interpréter le résultat.