TD M1 – Algèbre

Série 10 – Rotations, générateurs et le groupe SO(3)

Exercice 1

Soient A et B des matrices $n \times n$ quelconques.

1. Montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{At} = A\,\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}\,A.$$
2. Montrer que $\det(I + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} B + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et en déduire que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\mathrm{e}^{At}) = \operatorname{Tr} A \det(\mathrm{e}^{At}).$$
Déterminer alors $\det(\mathrm{e}^{At})$.
3. Soit $B(t) = \mathrm{e}^{At}\,B\,\mathrm{e}^{-At}$. Montrer, en calculant ses dérivées, que
$$B(t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!} B_k,$$
où $B_0 = B$, $B_1 = [A, B] = AB - BA$ et $B_{k+1} = [A, B_k]$ pour $k \geqslant 1$ (formule des commutateurs emboîtés).

Exercice 2

1. Soit n un vecteur unité de $\mathbb{R}^3$. Soit $R_{n,\alpha}$ la rotation d'angle α autour de n. Exprimer $R_{n,\alpha}(x)$ en fonction de $n \cdot x$ et $n \wedge x$.
Indication: Travailler dans une base orthogonale contenant n et $n \wedge x$.
2. Déterminer la matrice $A(n)$ telle que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} R_{n,\alpha}(x)\Big|_{\alpha=0} = A(n)x.$$
Exprimer $R_{n,\alpha}$ à l'aide de nn^T et $A(n)$, et vérifier que $R_{n,\alpha} \in \mathrm{SO}(3)$.
3. Montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} R_{n,\alpha} = A(n) R_{n,\alpha}$$
et en déduire $\mathrm{e}^{A(n)\alpha}$.
Rappel: Pour $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$.
4. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On dénote $A(e_i)$ par A_i. Calculer le commutateur $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$ pour tout couple (i, j). En déduire $[A(n), A(m)]$ pour deux vecteurs quelconques $n, m \in \mathbb{R}^3$.
5. Soit m un vecteur unité de $\mathbb{R}^3$ et $B = A(m)$. Montrer que
$$\mathrm{e}^{A(n)\alpha}\,\mathrm{e}^{B\beta}\,\mathrm{e}^{-A(n)\alpha} = \mathrm{e}^{C(n,\alpha,m)\beta}$$
pour une matrice $C(n, \alpha, m)$ qu'on déterminera. Interpréter ce résultat géométriquement.