TD M1 – Algèbre

Série 1 – Rappels sur les groupes

Exercice 1

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, les applications ℓ_a et r_a, définies par $\ell_a(g) = ag$ et $r_a(g) = ga$ sont de bijections de G. Quelle est la conséquence de ces faits pour la table de composition de G?
2. Montrer que l'application f définie par $f(g) = g^{-1}$ est un endomorphisme de G si et seulement si G est abélien.
3. En déduire qu'un groupe pour lequel tout élément est son propre inverse est abélien.

Exercice 2

Soit G un groupe fini. Montrer que $|G|$ est pair si et seulement s'il existe $g \in G$, $g \neq e$, tel que $g = g^{-1}$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un groupe abélien de cardinal n.
2. Montrer qu'il n'existe qu'un groupe, à isomorphisme près, de cardinal n pour $n = 1, 2, 3$.
3. Montrer qu'il existe exactement 2 groupes, à isomorphisme près, de cardinal 4.
4. Montrer qu'un groupe ne contenant pas plus de 5 éléments est abélien.
   Indication: Supposer qu'il existe a, b tels que $ab \neq ba$. Montrer que e, a, b, ab et ba sont alors distincts. Par élimination, montrer que $a^2 = e$ et trouver une contradiction.
5. Donner un exemple d'un groupe non abélien de cardinal 6.