

# Décroissance de l'énergie locale et estimations de Strichartz globales pour l'équation des ondes avec une perturbation périodique en temps et non captive

Yavar Kian

Orléans, 02/02/2011.

# Sommaire

Introduction

Les hypothèses

Principaux résultats

Décroissance de l'énergie locale

Estimations de Strichartz locales

Intégrabilité  $L^2$  en temps de l'énergie locale

Passage des estimations de Strichartz locales aux estimations de Strichartz globales

Application

Perspectives

## Le problème de Cauchy

► On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $n \geq 3$  et  $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ .

## Le problème de Cauchy

► On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $n \geq 3$  et  $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ .

► On suppose que la métrique  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est  $C^\infty$  et pour  $A(t, x) = (a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ , on a

- (i) il existe  $\rho > 0$  tel que  $A(t, x) = I_n$  pour  $|x| \geq \rho$ ,
- (ii) il existe  $T > 0$  tel que  $A(t + T, x) = A(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,
- (iii)  $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,
- (iv) il existe  $C_0 > c_0 > 0$  tel que  $C_0 |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$ .

## Le problème de Cauchy

► On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $n \geq 3$  et  $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ .

► On suppose que la métrique  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est  $C^\infty$  et pour

$A(t, x) = (a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ , on a

- (i) il existe  $\rho > 0$  tel que  $A(t, x) = I_n$  pour  $|x| \geq \rho$ ,
- (ii) il existe  $T > 0$  tel que  $A(t + T, x) = A(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,
- (iii)  $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,
- (iv) il existe  $C_0 > c_0 > 0$  tel que  $C_0 |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$ .

► On associe au problème (1) le propagateur

$$\mathcal{U}(t, s) : \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \ni (f_1, f_2) = f \mapsto \mathcal{U}(t, s)f = (u, u_t)(t, x) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$  on a

$$\mathcal{U}(t + T, s + T) = \mathcal{U}(t, s), \quad \|\mathcal{U}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq Ae^{C|t-s|}.$$

Notre objectif est d'établir des estimations des solutions du problème (1). Nous étudierons principalement les conditions permettant d'obtenir la décroissance de l'énergie locale et des estimations de Strichartz globales des solutions de (1).

Notre objectif est d'établir des estimations des solutions du problème (1). Nous étudierons principalement les conditions permettant d'obtenir la décroissance de l'énergie locale et des estimations de Strichartz globales des solutions de (1).

L'énergie locale associée à (1) est définie par

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n))}, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Notre objectif est d'établir des estimations des solutions du problème (1). Nous étudierons principalement les conditions permettant d'obtenir la décroissance de l'énergie locale et des estimations de Strichartz globales des solutions de (1).

L'énergie locale associée à (1) est définie par

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))}, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On dit que l'énergie locale de (1) décroît si on a

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_\chi \rho(t - s), \quad t \geq s, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1) \quad (2)$$

avec  $C_\chi > 0$  indépendant de  $t$  et de  $s$ , et  $\rho(t)$  une fonction tendant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .



Notre objectif est d'établir des estimations des solutions du problème (1). Nous étudierons principalement les conditions permettant d'obtenir la décroissance de l'énergie locale et des estimations de Strichartz globales des solutions de (1).

L'énergie locale associée à (1) est définie par

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))}, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On dit que l'énergie locale de (1) décroît si on a

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_\chi \rho(t - s), \quad t \geq s, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1) \quad (2)$$

avec  $C_\chi > 0$  indépendant de  $t$  et de  $s$ , et  $\rho(t)$  une fonction tendant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ . **Nous considérerons le cas où  $\rho \in L^1([0, +\infty[)$ .**

Notre objectif est d'établir des estimations des solutions du problème (1). Nous étudierons principalement les conditions permettant d'obtenir la décroissance de l'énergie locale et des estimations de Strichartz globales des solutions de (1).

L'énergie locale associée à (1) est définie par

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))}, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On dit que l'énergie locale de (1) décroît si on a

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s) \chi\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_\chi \rho(t - s), \quad t \geq s, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1) \quad (2)$$

avec  $C_\chi > 0$  indépendant de  $t$  et de  $s$ , et  $\rho(t)$  une fonction tendant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ . **Nous considérerons le cas où  $\rho \in L^1([0, +\infty[)$ .** Ce résultat implique que l'énergie globale de (1) est uniformément bornée par rapport au temps.

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante :

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

► On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution  $u$  de (1) avec  $s = 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (4)$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $t$ . L'estimation (4) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz.

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

► On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution  $u$  de (1) avec  $s = 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (4)$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $t$ . L'estimation (4) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz. Pour obtenir les estimation de Strichartz globales on procède de la façon suivante :

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

► On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution  $u$  de (1) avec  $s = 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (4)$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $t$ . L'estimation (4) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz. Pour obtenir les estimation de Strichartz globales on procède de la façon suivante :

( Estimations de  
Strichartz locales )

Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

► On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution  $u$  de (1) avec  $s = 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (4)$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $t$ . L'estimation (4) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz. Pour obtenir les estimation de Strichartz globales on procède de la façon suivante :

$$\left( \begin{array}{l} \text{Estimations de} \\ \text{Strichartz locales} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Décroissance de} \\ \text{l'énergie locale} \end{array} \right)$$



Les estimations de Strichartz des solutions des équations des ondes sont des estimations  $L_t^p L_x^q$ . Nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : ► on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution  $u$  de (1),

l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

avec  $\delta > 0$ .

► On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution  $u$  de (1) avec  $s = 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (4)$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $t$ . L'estimation (4) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz. Pour obtenir les estimation de Strichartz globales on procède de la façon suivante :

$$\left( \begin{array}{c} \text{Estimations de} \\ \text{Strichartz locales} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Décroissance de} \\ \text{l'énergie locale} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} \text{Estimations de} \\ \text{Strichartz globales} \end{array} \right)$$

# Résultats connus

## Décroissance de l'énergie locale

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes.

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Sous l'hypothèse de non capture, **Vainberg** montre que si  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est indépendante de  $t$  et la perturbation est non captive on a la décroissance de l'énergie locale pour le problème (1).

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Sous l'hypothèse de non capture, **Vainberg** montre que si  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est indépendante de  $t$  et la perturbation est non captive on a la décroissance de l'énergie locale pour le problème (1).

### Estimations de Strichartz globales

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Sous l'hypothèse de non capture, **Vainberg** montre que si  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est indépendante de  $t$  et la perturbation est non captive on a la décroissance de l'énergie locale pour le problème (1).

### Estimations de Strichartz globales

Les estimations de Strichartz ont été initialement introduites par Strichartz dans **Strichartz 1970** pour l'équation des ondes libres  $((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} = I_n \text{ et } s = 0)$ .

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Sous l'hypothèse de non capture, **Vainberg** montre que si  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est indépendante de  $t$  et la perturbation est non captive on a la décroissance de l'énergie locale pour le problème (1).

### Estimations de Strichartz globales

Les estimations de Strichartz ont été initialement introduites par Strichartz dans **Strichartz 1970** pour l'équation des ondes libres  $((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} = I_n \text{ et } s = 0)$ . Par la suite, il a été établi que (voir par exemple, **Keel et Tao 1998**), pour  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} = I_n$  et  $s = 0$  et pour  $2 \leq p, q \leq +\infty$  vérifiant

$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - 1$ ,  $\frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$  avec  $(p, q) \neq (2, \infty)$  lorsque  $n = 3$ , la solution  $u$  de (1) vérifie l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0.$$

## Résultats connus

### Décroissance de l'énergie locale

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans **Morawetz 1966** et **Morawetz 1968**. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Sous l'hypothèse de non capture, **Vainberg** montre que si  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est indépendante de  $t$  et la perturbation est non captive on a la décroissance de l'énergie locale pour le problème (1).

### Estimations de Strichartz globales

Les estimations de Strichartz ont été initialement introduites par Strichartz dans **Strichartz 1970** pour l'équation des ondes libres  $((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} = I_n \text{ et } s = 0)$ . Par la suite, il a été établi que (voir par exemple, **Keel et Tao 1998**), pour  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} = I_n$  et  $s = 0$  et pour  $2 \leq p, q \leq +\infty$  vérifiant

$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - 1$ ,  $\frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$  avec  $(p, q) \neq (2, \infty)$  lorsque  $n = 3$ , la solution  $u$  de (1) vérifie l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0.$$

Les estimations de Strichartz constituent un outil très important pour prouver l'existence de solutions d'équations non linéaires.



## Hypothèse de non capture

Considérons une bicaractéristique nulle  $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$  du symbole principal  $\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$  de  $\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  vérifiant

$$t(0) = t_0, |x(0)| \leq R_1, \quad \tau^2(\sigma) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t(\sigma), x(\sigma)) \xi_i(\sigma) \xi_j(\sigma).$$

Les bicaractéristiques peuvent être paramétrées par rapport à  $t$  et elles sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Avec un volontaire abus de notation, on notera  $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$  la bicaractéristique  $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$  paramétrée par rapport à  $t$ .

## Hypothèse de non capture

Considérons une bicaractéristique nulle  $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$  du symbole principal  $\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$  de  $\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  vérifiant

$$t(0) = t_0, |x(0)| \leq R_1, \quad \tau^2(\sigma) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t(\sigma), x(\sigma)) \xi_i(\sigma) \xi_j(\sigma).$$

Les bicaractéristiques peuvent être paramétrées par rapport à  $t$  et elles sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Avec un volontaire abus de notation, on notera  $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$  la bicaractéristique  $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$  paramétrée par rapport à  $t$ .

On introduit la condition suivante :

(H1) la métrique scalaire  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est **non captive** si pour tout  $R > R_1$ , il existe  $T(R, R_1) > 0$  tel que  $|x(t)| > R$  pour  $|t - t_0| \geq T(R, R_1)$ .

La condition de non capture (H1) est nécessaire pour les estimations de Strichartz, car pour certaines perturbations captives il est possible de trouver des solutions dont l'énergie croît de façon exponentielle (voir **Colombini et Rauch 2008**).

## Seconde hypothèse

L'hypothèse de non capture ne suffit pas à obtenir une estimation uniforme de l'énergie globale.

## Seconde hypothèse

L'hypothèse de non capture ne suffit pas à obtenir une estimation uniforme de l'énergie globale. Colombini, Petkov et Rauch ont établi dans **Colombini, Petkov et Rauch 2009**, qu'il existe un potentiel positif  $V(t, x)$  périodique en temps et à support compact tel qu'il existe une solution de  $\partial_t^2 u - \Delta u + V(t, x)u = 0$  dont l'énergie croît exponentiellement.

## Seconde hypothèse

L'hypothèse de non capture ne suffit pas à obtenir une estimation uniforme de l'énergie globale. Colombini, Petkov et Rauch ont établi dans **Colombini, Petkov et Rauch 2009**, qu'il existe un potentiel positif  $V(t, x)$  périodique en temps et à support compact tel qu'il existe une solution de  $\partial_t^2 u - \Delta u + V(t, x)u = 0$  dont l'énergie croît exponentiellement.

Soient  $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On définit la résolvante tronquée du problème (1) par

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = \psi_1(\mathcal{U}(T, 0) - e^{-i\theta})^{-1}\psi_2, \quad \text{Im}(\theta) > AT.$$

On prouve facilement que pour  $A > 0$  suffisamment grand,  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$  est holomorphe sur  $\text{Im}(\theta) \geq AT$ .

## Seconde hypothèse

L'hypothèse de non capture ne suffit pas à obtenir une estimation uniforme de l'énergie globale. Colombini, Petkov et Rauch ont établi dans **Colombini, Petkov et Rauch 2009**, qu'il existe un potentiel positif  $V(t, x)$  périodique en temps et à support compact tel qu'il existe une solution de  $\partial_t^2 u - \Delta u + V(t, x)u = 0$  dont l'énergie croît exponentiellement.

Soient  $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On définit la résolvante tronquée du problème (1) par

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = \psi_1(\mathcal{U}(T, 0) - e^{-i\theta})^{-1}\psi_2, \quad \text{Im}(\theta) > AT.$$

On prouve facilement que pour  $A > 0$  suffisamment grand,  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$  est holomorphe sur  $\text{Im}(\theta) \geq AT$ . Dans la suite on verra que, sous la condition (H1),  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$  se prolonge de façon méromorphe sur  $\mathbb{C}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} + i\mathbb{R}^-\}$  pour  $n$  pair. Afin d'éviter les phénomènes décrits dans **Colombini, Petkov et Rauch 2009**, nous imposerons une condition portant sur la nature du prolongement de  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ .

## Seconde hypothèse

Notre seconde hypothèse est la suivante :

(H2) Il existe  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant  $\varphi_1 = 1$  pour  $|x| \leq \rho + 2 + T$  et  $\varphi_2 = 1$  sur  $|x| \leq \rho + 2 + T$ , telles que l'opérateur  $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$  admet un prolongement holomorphe de  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq AT > 0\}$  sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ , pour  $n \geq 3$  impair, et sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$  pour  $n \geq 4$  pair. De plus, pour  $n$  pair,  $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$  se prolonge de façon continue de  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$  sur

$$\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0, \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

et on a

$$\limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \text{Im } \lambda > 0}} \|R_{\psi_1, \psi_2}(\lambda)\| < \infty.$$

# Décroissance de l'énergie locale

## Théorème 1

Supposons que  $n \geq 3$ . Soit  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  une métrique telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors, on a

$$\|\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \chi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C \rho(t-s) \quad \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}^\infty(|x| \leq \rho+1)$$

avec

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t+1) \ln^2(t+e)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ e^{-\delta t} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$



# Estimations de Strichartz globales

## Théorème 2

Supposons que  $n \geq 3$ . Soit  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Supposons que  $2 \leq p, q < +\infty$  vérifient les conditions

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

Alors, pour  $u(t)$  la solution de (1), avec  $s = 0$  et  $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ , on a, pour tout  $t > 0$ , l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^1} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

## Méthode employée

Dans **Vainberg 1993**, Vainberg propose une étude générale du comportement asymptotique de la solution des problèmes perturbés de façon périodique en temps, avec l'unique hypothèse de non capture. Pour cela, Vainberg utilise, à la place de la transformation de Fourier en temps, la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand qui a la forme

$$F(\varphi)(t, \theta, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(t + kT, x) e^{ik\theta}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n}), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

## Méthode employée

Dans **Vainberg 1993**, Vainberg propose une étude générale du comportement asymptotique de la solution des problèmes perturbés de façon périodique en temps, avec l'unique hypothèse de non capture. Pour cela, Vainberg utilise, à la place de la transformation de Fourier en temps, la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand qui a la forme

$$F(\varphi)(t, \theta, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(t + kT, x) e^{ik\theta}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n}), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Nous allons appliquer ces résultats pour montrer que, sous l'hypothèse (H1), la résolvante tronquée  $R_{\chi, \psi}(\theta)$  se prolonge de façon méromorphe de  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq AT\}$  sur le demi plan inférieur. Puis en combinant ce résultat avec l'hypothèse (H2), on en déduira la décroissance de l'énergie locale.

# Prolongement méromorphe de la résolvante tronquée

## Théorème 3

Supposons que l'hypothèse (H1) est satisfaite. Soit  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors,  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$  admet un prolongement méromorphe de  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > AT\}$  sur  $\mathbb{C}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\mathbb{C}' = \{\theta \in \mathbb{C} : \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} + i\mathbb{R}^-\}$  pour  $n \geq 4$  paire. De plus, pour  $n \geq 4$  pair, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $|\theta| \leq \varepsilon_0$ , on a

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj} \theta^k (\log \theta)^{-j}. \quad (5)$$

Ici  $R_{k,j} \in \mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))$  et, pour  $k < 0$  ou  $j \neq 0$ ,  $R_{k,j}$  est un opérateur de rang fini.

# Prolongement méromorphe de la résolvante tronquée

## Théorème 3

Supposons que l'hypothèse (H1) est satisfaite. Soit  $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors,  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$  admet un prolongement méromorphe de  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > AT\}$  sur  $\mathbb{C}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\mathbb{C}' = \{\theta \in \mathbb{C} : \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} + i\mathbb{R}^-\}$  pour  $n \geq 4$  paire. De plus, pour  $n \geq 4$  pair, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $|\theta| \leq \varepsilon_0$ , on a

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj} \theta^k (\log \theta)^{-j}. \quad (5)$$

Ici  $R_{k,j} \in \mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))$  et, pour  $k < 0$  ou  $j \neq 0$ ,  $R_{k,j}$  est un opérateur de rang fini.

### Idée de la preuve du Théorème 3 :

Soient  $v$  la solution de (1) vérifiant  $(v, \partial_t(v))|_{t=s} = (0, g)$  et  $w$  la solution de (1) vérifiant  $(w, \partial_t(w))|_{t=s} = (h, 0)$ . Notons  $V(t, s)$  et  $U(t, s)$  définie par  $V(t, s)g = v$  et  $U(t, s)h = w$ . Fixons  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\gamma(t) = 1$  pour  $t > 0$  et  $\gamma(t) = 0$  pour  $t \leq -\frac{T}{2}$ .

Pour  $\text{Im}(\theta) > AT$ , on définit

$$F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta) = e^{i\frac{t\theta}{T}} F [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta).$$

Pour  $\text{Im}(\theta) > AT$ , on définit

$$F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta) = e^{i\frac{t\theta}{T}} F [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta).$$

► En généralisant des résultats de **Vainberg 1993**, on montre que, pour  $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$ ,  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  et  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 \partial_t V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  vérifient le prolongement méromorphe défini dans le Théorème 3.

Pour  $\text{Im}(\theta) > AT$ , on définit

$$F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta) = e^{i\frac{t\theta}{T}} F [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta).$$

- ▶ En généralisant des résultats de **Vainberg 1993**, on montre que, pour  $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$ ,  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  et  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 \partial_t V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  vérifient le prolongement méromorphe défini dans le Théorème 3.
- ▶ On déduit de ce résultat que  $F' [\gamma(t)\psi_1 U(t,0)\psi_2] (T, \theta)$  et  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 \partial_t U(t,0)\psi_2] (T, \theta)$  vérifient le prolongement méromorphe défini dans le Théorème 3.



Pour  $\text{Im}(\theta) > AT$ , on définit

$$F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta) = e^{i\frac{t\theta}{T}} F [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (t, \theta).$$

- ▶ En généralisant des résultats de **Vainberg 1993**, on montre que, pour  $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$ ,  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  et  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 \partial_t V(t,s)\psi_2] (T, \theta)$  vérifient le prolongement méromorphe défini dans le Théorème 3.
- ▶ On déduit de ce résultat que  $F' [\gamma(t)\psi_1 U(t,0)\psi_2] (T, \theta)$  et  $F' [\gamma(t-s)\psi_1 \partial_t U(t,0)\psi_2] (T, \theta)$  vérifient le prolongement méromorphe défini dans le Théorème 3.
- ▶ En utilisant le fait que, pour  $\text{Im}(\theta) > AT$ , on a

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = -e^{i\theta} F' [\gamma(t)\psi_1 U(t,0)\psi_2] (T, \theta)$$

et on en déduit le prolongement de  $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ .

# Décroissance de l'énergie locale

**Idée de la preuve :**

# Décroissance de l'énergie locale

**Idée de la preuve :**

► Pour  $A_1 > A$ , on a la formule d'inversion suivante

$$\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2 = - \int_{[-\pi + iA_1 T, \pi + iA_1 T]} e^{-i(k+1)\theta} R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

# Décroissance de l'énergie locale

## Idée de la preuve :

- Pour  $A_1 > A$ , on a la formule d'inversion suivante

$$\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2 = - \int_{[-\pi + iA_1 T, \pi + iA_1 T]} e^{-i(k+1)\theta} R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- L'hypothèse (H2) implique que  $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$  n'a pas de pôles sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0, \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}\}$  pour  $n \geq 4$  pair. De plus, pour  $n \geq 4$  pair, il existe  $\varepsilon_0$  tel que, pour  $|\theta| < \varepsilon_0$ , on a

$$R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj} \theta^k (\log \theta)^{-j}$$

avec  $R_{kj} = 0$  pour  $k < 0$  ou pour  $k = 0$  et  $j < 0$ .

# Décroissance de l'énergie locale

## Idée de la preuve :

- Pour  $A_1 > A$ , on a la formule d'inversion suivante

$$\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2 = - \int_{[-\pi + iA_1 T, \pi + iA_1 T]} e^{-i(k+1)\theta} R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- L'hypothèse (H2) implique que  $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$  n'a pas de pôles sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0, \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}\}$  pour  $n \geq 4$  pair. De plus, pour  $n \geq 4$  pair, il existe  $\varepsilon_0$  tel que, pour  $|\theta| < \varepsilon_0$ , on a

$$R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj} \theta^k (\log \theta)^{-j}$$

avec  $R_{kj} = 0$  pour  $k < 0$  ou pour  $k = 0$  et  $j < 0$ .

- En intégrant sur un contour convenable de  $\mathbb{C}$ , on obtient

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq Cp(kT), \quad k \in \mathbb{N}.$$

# Décroissance de l'énergie locale

## Idée de la preuve :

- Pour  $A_1 > A$ , on a la formule d'inversion suivante

$$\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2 = - \int_{[-\pi + iA_1 T, \pi + iA_1 T]} e^{-i(k+1)\theta} R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- L'hypothèse (H2) implique que  $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$  n'a pas de pôles sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$  pour  $n \geq 3$  impair et sur  $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0, \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}\}$  pour  $n \geq 4$  pair. De plus, pour  $n \geq 4$  pair, il existe  $\varepsilon_0$  tel que, pour  $|\theta| < \varepsilon_0$ , on a

$$R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj} \theta^k (\log \theta)^{-j}$$

avec  $R_{kj} = 0$  pour  $k < 0$  ou pour  $k = 0$  et  $j < 0$ .

- En intégrant sur un contour convenable de  $\mathbb{C}$ , on obtient

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(kT, 0) \varphi_2\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq Cp(kT), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- En combinant la propriété de périodicité de  $\mathcal{U}(t, s)$  et la propagation en temps fini, on en déduit la décroissance de l'énergie locale.

# Estimations de Strichartz locales

Pour  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$ , on définit  $(h)_1 = h_1$ .

## Théorème 4

Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $2 \leq p, q < +\infty$ ,  $s \in [0, T]$  vérifiant

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q}, \quad (6)$$

on a

$$\int_s^{s+\delta} \|\psi(\mathcal{U}(t,s)f)_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C(T, \psi, p, q, n) \|f\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)}^p, \quad (7)$$

où  $\delta$  et  $C > 0$  sont indépendants de  $s$  et  $f$ .

Notons  $U_0(t)$  le groupe unitaire associé à l'équation des ondes libres.

## Théorème 5

*(Smith et Sogge 2000)* Soit  $n \geq 3$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \|\varphi U_0(t)f\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(\varphi, n, \gamma) \|f\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (8)$$



Notons  $U_0(t)$  le groupe unitaire associé à l'équation des ondes libres.

## Théorème 5

*(Smith et Sogge 2000)* Soit  $n \geq 3$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \|\varphi U_0(t)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(\varphi, n, \gamma) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (8)$$

## Théorème 6

Supposons que  $n \geq 3$  est impair et que les hypothèses (H1), (H2) sont satisfaites. Alors, pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$ , on a

$$\int_0^\infty \|\varphi \mathcal{U}(t, 0)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(T, \varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (9)$$

## Passage des estimations de Strichartz locales aux estimations de Strichartz globales

Tout d'abord, fixons  $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$  telle que  $\chi = 1$ , pour  $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \chi \leq 1$ , et considérons  $u$  solution de (1), pour  $s = 0$ . Décomposons  $u$  de la façon suivante

$$u = \chi u + (1 - \chi)u.$$

Pour établir les estimations de Strichartz globales, nous procédons en deux étapes. La première étape consiste à appliquer les estimations de Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes libres et l'intégrabilité  $L^2$  en temps de l'énergie locale, afin d'estimer  $(1 - \chi)u$ . La deuxième étape consiste à combiner les estimations de Strichartz locales avec l'intégrabilité  $L^2$  en temps de l'énergie locale, puis à appliquer un argument semblable à celui utilisé dans **Burq 2003** pour estimer  $\chi u$ .

## Application aux équations non linéaires

Considérons le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - F_k(u) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0, x) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (10)$$

où pour un  $k > 1$  donné, le terme non linéaire  $F_k$  est une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $F_k(0) = 0$ ,  $|F'_k(u)| \leq C|u|^{k-1}$ .

## Application aux équations non linéaires

Considérons le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - F_k(u) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0, x) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (10)$$

où pour un  $k > 1$  donné, le terme non linéaire  $F_k$  est une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $F_k(0) = 0$ ,  $|F'_k(u)| \leq C|u|^{k-1}$ . Considérons les valeurs de  $k$  suivantes :

$$\begin{array}{l} i) \quad n = 3, \quad 3 < k < 5, \\ ii) \quad n = 4, \quad 2 < k < 3, \\ iii) \quad n = 5, \quad \frac{5}{3} < k < \frac{7}{3}, \\ iv) \quad n \geq 6, \quad \frac{n}{n-2} < k < \frac{n}{n-3}. \end{array} \quad (11)$$

# Application aux équations non linéaires

## Théorème 7

Supposons que  $k$  et  $n$  vérifient les conditions (11). Soit  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$   $T$ -périodique telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors, il existe  $C(k, F_k, T, \rho, n)$  telle que, pour tout  $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ , il existe une solution faible  $u$  de (10) sur  $[0, T_1]$  avec

$$T_1 = C(k, F_k, T, n, \rho) \left( \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-d}, \quad (12)$$

où  $d = \frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}$ . De plus,  $u$  est l'unique solution faible de (10) sur  $[0, T_1]$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in C([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in C([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad & u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

## Application aux équations non linéaires

### Théorème 7

Supposons que  $k$  et  $n$  vérifient les conditions (11). Soit  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$   $T$ -périodique telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors, il existe  $C(k, F_k, T, \rho, n)$  telle que, pour tout  $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ , il existe une solution faible  $u$  de (10) sur  $[0, T_1]$  avec

$$T_1 = C(k, F_k, T, n, \rho) \left( \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-d}, \quad (12)$$

où  $d = \frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}$ . De plus,  $u$  est l'unique solution faible de (10) sur  $[0, T_1]$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in C([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in C([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad & u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Ainsi, on a un temps d'existence  $T_1 = C\varepsilon^{-d}$  pour des données initiales d'ordre  $\varepsilon$ .

# Équation de Schrödinger avec métrique périodique en temps

Considérons le problème

$$\begin{cases} i\partial_t v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ v(s, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (14)$$

nous supposons que  $(a_{ij}(t, x))_{0 \leq i, j \leq n}$  vérifie (ii), (iii) et (iv) avec  $T = 2\pi$ .

# Équation de Schrödinger avec métrique périodique en temps

Considérons le problème

$$\begin{cases} i\partial_t v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ v(s, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (14)$$

nous supposons que  $(a_{ij}(t, x))_{0 \leq i, j \leq n}$  vérifie (ii), (iii) et (iv) avec  $T = 2\pi$ . On associe à (14) le propagateur

$$U(t, s) : L^2(\mathbb{R}^n) \ni g \mapsto v(t) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Le propagateur  $U(t, s)$  est unitaire et fortement continue en  $(t, s)$ .



# Équation de Schrödinger avec métrique périodique en temps

Considérons le problème

$$\begin{cases} i\partial_t v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ v(s, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (14)$$

nous supposons que  $(a_{ij}(t, x))_{0 \leq i, j \leq n}$  vérifie (ii), (iii) et (iv) avec  $T = 2\pi$ . On associe à (14) le propagateur

$$U(t, s) : L^2(\mathbb{R}^n) \ni g \mapsto v(t) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Le propagateur  $U(t, s)$  est unitaire et fortement continue en  $(t, s)$ . Notons  $\mathbb{U}(\sigma)$  l'opérateur défini sur  $L_t^2(\mathbb{T}, L_x^2(\mathbb{R}^n))$  par

$$(\mathbb{U}(\sigma)u)(t) = U(t, t - \sigma)u(t - \sigma), \quad u \in L_t^2(\mathbb{T}, L_x^2(\mathbb{R}^n))$$

et  $P$  l'opérateur différentiel défini par

$$P = -i\partial_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right)$$

On a

$$U(\sigma) = e^{-i\sigma P}.$$

On a

$$\mathbb{U}(\sigma) = e^{-i\sigma P}.$$

On supposera que  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est non captive et qu'il existe  $\nu > 2$  tel que

$$\left\| \partial_t^\beta \partial_x^\alpha ((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} - I_n) \right\| \leq C \langle x \rangle^{-\nu - |\alpha| - \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\mathbb{U}(\sigma) = e^{-i\sigma P}.$$

On supposera que  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est non captive et qu'il existe  $\nu > 2$  tel que

$$\left\| \partial_t^\beta \partial_x^\alpha ((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} - I_n) \right\| \leq C \langle x \rangle^{-\nu - |\alpha| - \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}.$$

Dans un premier temps, en nous inspirant des résultats de **Yokoyama 1998**, **Galbatar, Jensen, Yajima 2004**, ainsi que d'autres travaux de Yajima, notre objectif sera d'étudier la nature du spectre de  $P$  et d'établir des estimations de la résolvante tronquée

$$\langle x \rangle^{-s} (P - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$$

pour  $\text{Im}(z) \rightarrow 0, \text{Im}(z) > 0$ .

On a

$$\mathbb{U}(\sigma) = e^{-i\sigma P}.$$

On supposera que  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est non captive et qu'il existe  $\nu > 2$  tel que

$$\left\| \partial_t^\beta \partial_x^\alpha ((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} - I_n) \right\| \leq C \langle x \rangle^{-\nu - |\alpha| - \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}.$$

Dans un premier temps, en nous inspirant des résultats de **Yokoyama 1998**, **Galbatar, Jensen, Yajima 2004**, ainsi que d'autres travaux de Yajima, notre objectif sera d'étudier la nature du spectre de  $P$  et d'établir des estimations de la résolvante tronquée

$$\langle x \rangle^{-s} (P - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$$

pour  $\text{Im}(z) \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}(z) > 0$ . Par la suite, nous en déduirons les conditions permettant d'obtenir une décroissance de l'énergie locale en utilisant l'opérateur  $\mathbb{U}(\sigma)$ .

On a

$$\mathbb{U}(\sigma) = e^{-i\sigma P}.$$

On supposera que  $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est non captive et qu'il existe  $\nu > 2$  tel que

$$\left\| \partial_t^\beta \partial_x^\alpha ((a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n} - I_n) \right\| \leq C \langle x \rangle^{-\nu - |\alpha| - \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}.$$

Dans un premier temps, en nous inspirant des résultats de **Yokoyama 1998**, **Galbatar, Jensen, Yajima 2004**, ainsi que d'autres travaux de Yajima, notre objectif sera d'étudier la nature du spectre de  $P$  et d'établir des estimations de la résolvante tronquée

$$\langle x \rangle^{-s} (P - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$$

pour  $\text{Im}(z) \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}(z) > 0$ . Par la suite, nous en déduirons les conditions permettant d'obtenir une décroissance de l'énergie locale en utilisant l'opérateur  $\mathbb{U}(\sigma)$ . Enfin, en combinant ces résultats avec des arguments semblables à ceux employés par **Bouclet, Tzvetkov 2008**, notre objectif sera d'établir des estimations de Strichartz globales.